MAGNETOHYDRODYNAMIQUE : SUR QUELQUES PROBLÈMES DE MAGNÉTOHYDRODYNAMIQUE D'UN FLUIDE ÉLECTRIQUEMENT CHARGÉ DANS UN MILIEU POREUX.

ABOUT A FEW M.H.D. PROBLEMS OF AN ELECTRICALLY CHARGED FLUID THROUGH A POROUS MEDIUM

Par
RAHAINGOARIVONY G.-H.

Maître-assistant,
Département des Mathématiques,
EES Sciences, Antananarivo.

Résumé :

On étudie l'écoulement M.H.D. stationnaire d'un fluide incompressible dans un milieu poreux, électriquement chargé. Si le fluide est non visqueux, on constate pour les perturbations le même phénomène que celui se présentant en M.H.D. classique. Pour une conductivité trop faible, on est obligé de modifier la loi de la densité du courant électrique, ce qui permet de trouver une solution de l'écoulement dans un corps infini, poreux, muni d'une fissure.

Abstract :

We study the M.H.D. two-dimensional steady flow of an incompressible electrically charged fluid through a porous medium. We remark the same phenomenon occuring in the perturbation flow as in the M.H.D. classical one, when the fluid is inviscid. We assume that the magnetic REYNOLDS number R_m is too small so that it is essential to modify the law of the electrical current density ; we are now able to resolve the problem of the flow through an infinite, porous medium, with an infinite slit.

1. Le système d'équations régissant l'écoulement se déduit du système proposé par M. Horia I. ENE [1]:

$$\text{grad } \bar{p} - \bar{q}\bar{E} - \frac{\mu}{m}\bar{J} \wedge \bar{H} + \frac{n}{k}\bar{V} = o \quad [1]$$
$$\text{div } \bar{V} = o \quad [2]$$
$$\text{div } \bar{H} = o \quad [3]$$
$$\text{rot } \bar{H} = \frac{\bar{J}}{m} \quad [4] \quad \text{avec } \bar{J} = m\sigma[\bar{E} + \frac{\mu}{m}\bar{V} \wedge \bar{H}] \quad [5]$$
$$\text{rot } \bar{E} = \bar{o} \quad [6]$$
$$\varepsilon p \text{ div } \bar{E} = \bar{q} \quad [7]$$

avec k: coefficient de perméabilité

n: viscosité du fluide

m: porosité du milieu

$\bar{V}$: vitesse de filtration

$\bar{p}$: pression

$\bar{J}$: densité du courant électrique

$\bar{H}$: champ magnétique

$\bar{E}$: champ électrique

$\bar{q}$: densité de charge électrique

μ: perméabilité magnétique

σ: coefficient de conductivité électrique

εp: coefficient diélectrique

ρ_0: densité du fluide

On suppose le mouvement s'effectuant en présence d'un champ magnétique imposé $\bar{H}_0$ et d'un champ électrique imposé $\bar{E}_0$. On utilise des variables adimensionnelles en posant:

$$x = \frac{\bar{x}}{a}, \; y = \frac{\bar{y}}{a}, \; V = \frac{\bar{V}}{V_0}, \; H = \frac{\bar{H}}{H_0}, \; q = \frac{\bar{q}}{Q_0}, \; p = \frac{\bar{p}}{\rho_0 V_0^2}, \; E = \frac{\bar{E}}{aQ_0/\varepsilon_p}$$

où a, $\bar{V}_0$, $\bar{H}_0$, $\bar{Q}_0$ sont des caractéristiques du milieu (longueur, vitesse, champ magnétique, charge électrique).

Linéarisant autour de $V_0 = o$, H_0 et E_0 c'est-à-dire en posant $H = H_0 + h$, $E = E_0 + e$:

$$- \text{grad } p + R_H^2 \text{ rot } h \wedge H_0 + \frac{\varepsilon^2 R_H^2}{R_Q^2} q E_0 - \frac{1}{K} v = o$$

$$\operatorname{div} h = \operatorname{div} v = o$$

$$\operatorname{rot} e = o$$

$$\operatorname{div} e = q$$

$$\operatorname{Rot} h = R_m \left[e + \frac{1}{m} v \wedge H_0\right]$$

où $R^2_H = \dfrac{\mu \overline{H}^2_0}{\rho_0 \overline{V}^2_0}$ = Inverse du carré du nombre d'ALFVEN

$R_m = \sigma\mu a \overline{V}_0$ = Nombre de REYNOLDS magnétique

$R^2_C = \dfrac{\overline{V}^2_0}{C^2}$ où C est défini par $\varepsilon_p \mu C^2 = 1$

$\varepsilon = \dfrac{\overline{Q}_0 \overline{V}_0 a}{\overline{H}_0}$ caractérisant l'importance de la charge électrique

$K = \dfrac{k\rho_0 V_0}{na}$ paramètre de filtration lié au nombre de REYNOLDS hydrodynamique Re par $K = \dfrac{R_e k}{a^2}$

Soient $H_0 = (H_x, H_y, H_z)$; $E_o = (E_x, E_y, o)$; le système précédent s'écrit :

$$-\frac{\delta p}{\delta x} - R^2_H H_z \frac{\delta h_z}{\delta x} - R^2_H H_y \left[\frac{\delta h_y}{\delta x} - \frac{\delta h_x}{\delta y}\right] + \frac{\varepsilon^2 R^2_H}{R^2_C} qE_x - \frac{1}{K} v_x = o$$

$$-\frac{\delta p}{\delta y} - R^2_H H_z \frac{\delta h_z}{\delta y} - R^2_H H \left[\frac{\delta h_y}{\delta x} - \frac{\delta h_x}{\delta y}\right] + \frac{\varepsilon^2 R^2_H}{R^2_C} qE_y - \frac{1}{K} v_y = o$$

$$R^2_H \left[H_x \frac{\delta h_z}{\delta x} + H_y \frac{\delta h_z}{\delta y}\right] - \frac{1}{K} v_z = o$$

$$\frac{\delta h_z}{\delta y} = R_m \left[\frac{\varepsilon}{R^2_C} e_x + \frac{1}{m}\left(H_z v_y - H_y v_z\right)\right]$$

$$-\frac{\delta h_z}{\delta x} = R_m \left[\frac{\varepsilon}{R^2_C} + \frac{1}{m}\left(-H_z v_x + H_x v_z\right)\right]$$

$$\frac{\delta h_y}{\delta x} - \frac{\delta h_x}{\delta y} = R_m H_y v_x$$

$$\frac{\delta h_x}{\delta x} + \frac{\delta h_y}{\delta y} = o\,; \qquad \frac{\delta v_x}{\delta x} + \frac{\delta v_y}{\delta y} = o$$

$$\frac{\delta e_x}{\delta x} + \frac{\delta e_y}{\delta y} = q\,; \qquad \frac{\delta e_x}{\delta y} - \frac{\delta e_y}{\delta x} = o$$

Appelons $\Psi(x, y)$ $X(x, y)$ les fonctions de courant définissant v et h, $\Phi(x, y)$ le potentiel du champ électrique

$$v_x = \frac{\delta \Psi}{\delta y}, \qquad v_y = -\frac{\delta \Psi}{\delta x}$$

$$h_x = \frac{\delta X}{\delta y}, \qquad h_y = -\frac{\delta X}{\delta x}$$

$$e_x = \frac{\delta \Phi}{\delta x}, \qquad e_y = \frac{\delta \Phi}{\delta y}$$

On remarque la possibilité d'avoir $h_z = v_z = o$ moyennant :

$$\frac{\varepsilon}{R^2 c}\Phi - \frac{1}{m} H_z \Psi = o$$

(Seule subsiste donc la 3[e] composante de la densité du courant électrique.)

Tenant compte de cette dernière relation, le système se réduit à :

$$-\frac{\delta p}{\delta x} - \left[\frac{R_H^2 R_m}{m} H_y^2 + \frac{1}{K}\right] \frac{\delta \Psi}{\delta y} + \varepsilon R_H^2 E_x H_y \, \Delta\Psi = o$$

$$-\frac{\delta p}{\delta y} + \left[\frac{R_H^2 R_m}{m} H_x H_y + \frac{1}{K}\right] \frac{\delta \Psi}{\delta x} + \varepsilon R_H^2 E_x H_y \, \Delta\Psi = o$$

2. Ecoulement d'un fluide non visqueux (ou encore dont le paramètre d'infiltration est infini).

Dans cette perspective, on suppose $E_y = H_x = o$ et que l'écoulement se fasse en l'absence de gradient de pression.

$\Psi(x, y)$ vérifie alors :

$$\frac{\varepsilon m}{R_m} \frac{E_x}{H_y} \Delta\Psi - \frac{\delta \Psi}{\delta y} = o$$

C'est l'équation classique d'OSEEN. La charge électrique étant en général faible, on formule l'hypothèse : $\frac{\varepsilon_m}{R_m}\frac{E_x}{H_y} \ll 1$. On assiste donc au même problème mathématique se posant en magnétohydrodynamique usuelle d'un fluide non visqueux [2] perturbé par des charges électriques. Considérons-en quelques applications.

a. Ecoulement dans un corps poreux assimilable à un quart de plan $(x > o, y > o)$.

Les conditions aux frontières sont : $\begin{cases} \Psi(o, y) = y & y > o \\ \Psi(x, o) = -x & x > o \end{cases}$

Ces conditions sont d'origine purement mécanique : elles expriment le fait que du fluide est injecté perpendiculairement aux parois à une vitesse uniforme. Dans [2] on a étudié le cas des perturbations dans un quart de plan à parois poreuses. On trouve uniformément :

$$\Psi(x, y) = U_0\,(x, y) + W_0\,(x, y) + O(\varepsilon')$$

avec :

$$U_0(x,y) = y\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{erfc}\,\frac{x^2}{2\sqrt{\frac{2\varepsilon m}{R_m}\frac{E_x}{H}y}} - \frac{x^2}{\frac{2\varepsilon m}{R_m}\frac{E_x}{H_y}}\left[\frac{2\varepsilon m}{R_m}\frac{E_x}{H\,x}\exp\left(\frac{-x^2}{\frac{8\varepsilon m}{R_m}\frac{E_x}{H_y}y}\right)\right.$$

$$\left. - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{erfc}\,\frac{x}{2\sqrt{\frac{2\varepsilon m}{R_m}\frac{E_x}{H_y}y}}\right]$$

$$W_0\,(x, y) = -\frac{x}{2}\left[\mathrm{erfc}\,\frac{x}{2\sqrt{\frac{\varepsilon m}{R_m}\frac{E_x}{H_y}y}} + \mathrm{erfc}\,\frac{-x}{2\sqrt{\frac{\varepsilon m}{R_m}\frac{E_x}{H_y}y}}\right]$$

b. Ecoulement dans un corps poreux assimilable à un carré dont deux côtés consécutifs sont perméables, les deux autres ne l'étant pas.

Les conditions requises aux frontières sont :

$$\left.\begin{aligned}\Psi(x,\ o) &= x\\ \Psi(x,\ 1) &= 1\end{aligned}\right]\ o<x<1$$

$$\left.\begin{aligned}\Psi(o,\ y) &= y\\ \Psi(1,\ y) &= 1\end{aligned}\right]\ o<y<1$$

Elles expriment que des parois perméables est injecté du fluide à une vitesse uniforme.

Le même problème mathématique s'est posé [2] dans des perturbations dues aux charges électriques dans un canal de section carré, deux côtés consécutifs étant perméables.

Uniformément on a :

$$\Psi(x,\ y) = x + u_0^{(1)}\left[\frac{x}{\sqrt{\dfrac{\varepsilon m}{R_m}\dfrac{E_x}{H_y}}},y\right] + v_0\left[x,\ \frac{-\,y}{\sqrt{\dfrac{\varepsilon m}{R_m}\dfrac{E_x}{H_y}}}\right]$$

où $u_0^{(1)}$ détermine une couche limite parabolique le long de $x = o$ avec

$$u_0^{(1)} = \left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{y - \dfrac{x^2}{2\varepsilon m\,\dfrac{E_x}{R_m H_y}}}{\sqrt{2}}\ \mathrm{erfc}\,\frac{x}{2\sqrt{\dfrac{2\varepsilon m}{R_m}\dfrac{E_x}{H_y}\,y}}\right.$$

$$\left. + \, x\sqrt{\frac{y}{\dfrac{\varepsilon m}{R_m}\dfrac{E_x}{H_y}}}\ \exp\left(\frac{x^2}{4\,\dfrac{\varepsilon m}{R_m}\dfrac{E_x}{H_y}\,y}\right)\right\}$$

$$v_0\left[x,\ \frac{1-y}{\dfrac{\varepsilon m}{R_m}\dfrac{E_x}{H_y}}\right] = \exp\left[-\frac{1-y}{\dfrac{\varepsilon m}{R_m}\dfrac{E_x}{H_y}}\right]\left[1 - x - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ u_0^{(1)}\left[\frac{x}{\sqrt{\dfrac{\varepsilon m}{R_m}\dfrac{E_x}{H_y}}},\ y\right]\right]$$

c. Ecoulement dans un milieu poreux infini muni d'une fissure assimilable à une plaque plane semi infinie ($y > o$).

Les conditions aux limites sont :

$$\begin{cases} \Psi(o, y) = o & \\ & y > o \\ \dfrac{\delta \Psi}{\delta x}(o, y) = o & \\ \Psi(x, y) \sim + x \text{ à l'infini amont.} & \end{cases}$$

Elles signifient que le fluide ne sort pas dans la fissure et que v_y est uniforme à l'infini amont.

On cherche une solution particulière de l'équation d'OSEEN vérifiant :

$$\left[\frac{\varepsilon m}{R_m} \frac{E_x}{H_y} \Delta - \frac{\delta}{\delta y}\right] \Delta \Psi = o$$

On sait [3] que la solution de cette équation avec les conditions aux limites précédentes s'obtient en introduisant la partie réelle et la partie imaginaire de $\left[\dfrac{R_m}{m} \dfrac{H_y}{\varepsilon E_x} (y + ix)\right]$ en tant que coordonnées paraboliques :

$$(2\alpha)^{\frac{1}{2}} \cos \frac{1}{2} \theta, \quad (2\alpha)^{\frac{1}{2}} \sin \frac{1}{2} \theta$$

La solution exacte est :

$$\Psi(x, y) = (2\alpha)^{\frac{1}{2}} \cos \frac{1}{2} \theta \left\{ (2\alpha)^{\frac{1}{2}} \sin \frac{1}{2} \theta \right.$$

$$\left. \operatorname{erf} \left[(\alpha)^{\frac{1}{2}} \sin \frac{1}{2} \theta \right] - \pi^{-\frac{1}{2}} \left(1 - e^{-2\alpha \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right) \right]$$

d'après LEWIS et CARRIER [3].

3. Cas où $\sigma \rightarrow o$.

On suppose maintenant σ trop « petit » tel qu'il n'est pas possible d'utiliser la loi d'OHM classique. On formule l'existence de porteurs de charge électrique, ce qui nous amène à poser : $\operatorname{rot} H = K_m qE + qV$ où K_m désigne la mobilité des charges électriques par rapport au fluide. En variables adimensionnelles on a :

$$\text{rot } H = \frac{\varepsilon}{Re_{ei}} qE + \varepsilon\, qV, \; Re_{ei}$$

étant le nombre de REYNOLDS électrique. Comme VATAZHIN A.-B. et GRABOVSKII V.-I. [4], cependant, nous ne retenons que le terme de convection, ce qui implique Re_{ei} infini. Les deux premières équations nous donnent :

$$\frac{\delta H_z}{\delta y} = \varepsilon q V_x = \varepsilon \Delta\Phi \; \frac{\delta\Psi}{\delta y}$$

$$-\frac{\delta H_z}{\delta x} = \varepsilon q V_y = -\, \varepsilon \Delta\Phi \frac{\delta\Psi}{\delta x}$$

Elles seront satisfaites pour $\Delta\Phi = -\Psi$ (8) impliquant ainsi $H_z = -\varepsilon\Psi^2(x, y)/2$. Les autres équations déterminant l'écoulement restent inchangées c'est-à-dire (1), (2), (3), (4), (6) et (7) écrites en variables adimensionnelles. En prenant toujours E_z nul, on remarque la possibilité d'avoir $H_x = H_y = o$ c'est-à-dire $X(x, y) \equiv o$. Considérant maintenant le paramètrede filtration K fini, les deux premières équations du mouvement donnent :

$$\frac{\varepsilon^2 R_H}{R^2_C} \left[\frac{\delta\Phi}{\delta x}\frac{\delta}{\delta y} \Delta\Phi - \frac{\delta\Phi}{\delta y}\frac{\delta}{\delta x} \Delta\Phi \right] - \frac{1}{K}\Delta\Phi = o$$

Ainsi $\Phi(\;, y)$ obéit à :

$$\frac{\delta\Phi}{\delta x}\frac{\delta}{\delta y} \Delta\Phi - \frac{\delta\Phi}{\delta y}\frac{\delta}{\delta x} \Delta\Phi + \frac{R^2_C}{\varepsilon^2 R^2_H K} \Delta(\Delta\Phi) = o,$$

équation qui s'apparente à celle régissant l'écoulement hydrodynamique classique. Après avoir résolu cette équation en Φ avec les conditions appropriées, on en déduit $\Psi(x, y)$ en vertu de (8). Cette analogie avec l'écoulement hydrodynamique nous permet, par exemple, de traiter celui dans un milieu poreux infini, comportant une fissure assimilable à une plaque plane semi infinie, représentée ici par l'axe ox ($x > o$). Nous supposons

$$\frac{R^2_C}{K\varepsilon^2 R^2_H} << 1.$$

A l'infini amont, on impose un champ électrique E_0 et E est nul dans la fissure, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \Phi\,(x, o) = o \\ \dfrac{\delta\Phi}{\delta y}(x, o) = o \\ \Phi(x, y) \sim y \text{ à l'infini amont.} \end{cases}$$

Rappelons brièvement le résultat [5]: le long de la fissure apparaît une couche limite d'épaisseur $\dfrac{R_C}{\varepsilon R_H \sqrt{K}}$. A l'extérieur de la couche limite:

$$\Phi\,(x, y) \sim y - \frac{\varepsilon R_H \sqrt{K}}{R_C}\,\beta\sqrt{2}(x^2 - y^2),$$

β étant une constante bien déterminée.

A l'intérieur de la couche limite la variable intérieure est définie par

$$Y = \frac{y}{R_{C/\varepsilon R_H \sqrt{K}}};$$

la valeur $\Phi(x, y)$ est donnée par:

$$\Phi(x, y) \sim \sqrt{2x}\,[\eta - \beta] + \frac{o}{R^2_{C/K\varepsilon^2 R^2_H}} \quad \text{avec } \eta = \frac{Y}{\sqrt{2x}}$$

BIBLIOGRAPHIE

1. *C. R. Acad. Sci.* Paris, t. CCLXXI (21 sept. 1970) — Série A — 568.

2. G.-H. RAHAINGOARIVONY — Thèse 3^{e} cycle (Mécanique Théorique) ; Toulouse 1974.

3. LEWIS and CARRIER. — *Some remarks on the flat plate boundary layer* (1949) p. 228-234.
Quaterly of Applied Mathematics, **7**, 181-241.

4. VATAZHIN A.-B. et GRABOVSKII V.-I. — *The spreading of singly ionized jets in hydrodynamic stream.* PMM vol. n° 1, 1973.

5. VAN DYKE. — *Perturbation methods in fluid mechanics*, 1964, Academic Press.