IDENTIFICATION DES TENSEURS ET DES FORMES MULTILINEAIRES. DUALITE DE $E^{*\otimes p}$ ET DE $E^{\otimes p}$. QUELQUES REMARQUES IMPORTANTES

par RAOELINA ANDRIAMBOLOLONA

Professeur titulaire

Laboratoire de Physique Nucléaire et Appliquée

BP 4279, Antananarivo (Madagascar)

Mai 1979

Résumé :

Nous montrons la possibilité d'identification des tenseurs définis comme produit tensoriel de vecteurs et comme formes multilinéaires dans le cas de dimension finie en montrant qu'il existe une bijection linéaire entre les deux définitions. Nous obtenons une isomorphisme d'espaces vectoriels, et nous déduisons la dualité de $E^{*\otimes p}$ et de $E^{\otimes p}$ dans le cas de dimensions finies. Nous concluons par des remarques qui nous semblent mal connues mais qui nous paraissent essentielles.

Abstract :

The identification of tensors defined as vector tensor products and as multilinear forms is shown in the case of finite dimensions by means of the existence of a linear bijection. Vectorial space isomorphism is then obtained, and the duality of $E^{*\otimes p}$ and $E^{\otimes p}$ is deduced in the finite dimension case. In the conclusion, essential remarks which are not wellknown are recalled.

1. INTRODUCTION

Il est possible de définir les tenseurs de deux façons.
La première consiste à les définir à partir du produit tensoriel de vecteurs, la seconde, à partir des formes multilinéaires.
Nous allons montrer qu'il existe une bijection linéaire des tenseurs définis comme produits tensoriels de vecteurs sur les formes multilinéaires dans le cas de dimension finie. Cette propriété de bijection permet alors leur identification.
Nous allons faire la démonstration dans le cas de deux espaces vectoriels quelconques E_1 et E_2 définis sur le *même* corps K, de dimensions finies respectives n_1 et n_2. L'extension de la demonstration au produit tensoriel d'un nombre quelconque mais *fini* d'espaces vectoriels de dimensions *finies* ne présente aucune difficulté.

Notations

$E_1 \bullet E_2$: produit tensoriel des espaces vectoriels E_1 et E_2

$L(E;F)$: ensemble des opérateurs linéaires appliquant l'espace vectoriel E dans F.

Nous utilisons la convention d'Einstein : nous sommons sur les indices égaux placés en positions haute et basse. S'il n'y a aucune indication, la sommation va de 1 à la dimension de l'espace vectoriel considéré ; si c'est nécessaire, nous mentionnons le domaine de valeurs des indices de sommation.
Nous soulignons les covecteurs (formes linéaires) et surlignons les vecteurs (ou contravecteurs d'ordre un).

$\otimes$:	produit défini dans le corps K
$+$:	somme vectorielle
$\bullet$:	produit tensoriel
$T(\underline{f})\,(\underline{g})$:	valeur de l'opérateur double T pour les covecteurs $\underline{f}$ et $\underline{g}$.
$\{\bar{e}_i\}$:	base de E_1 pour $i = (1, \ldots, n_1)$
$\{\underline{\varepsilon}^i\}$:	la base duale (ou cobase) de $\{\bar{e}_i\}$
$\{\bar{e}'_j\}$:	base de E_2 pour $j = (1, \ldots, n_2)$
$\{\underline{\varepsilon}'^j\}$:	la base duale (ou cobase) de $\{\bar{e}'_j\}$

2. PREMIERE DEFINITION DES TENSEURS A PARTIR DES PRODUITS TENSORIELS DE VECTEURS

Définissons d'abord le produit tensoriel de deux vecteurs $\bar{x}$ de E_1 et $\bar{y}$ de E_2 (voir par exemple [1]) :

2.1. $(\alpha \bar{x}) \bullet \bar{y} = \bar{x} \bullet (\alpha \bar{y}) = \alpha \bar{x} \bullet \bar{y}$

2.2. $(\bar{x} + \bar{x}') \bullet \bar{y} = \bar{x} \bullet \bar{y} + \bar{x}' \bullet \bar{y}$

2.3 $\bar{x} \bullet (\bar{y} + \bar{y}') = \bar{x} \bullet \bar{y} + \bar{x} \bullet \bar{y}'$

2.4. $\bar{x} \bullet \bar{y} = 0$ équivalent à $\bar{x} = \bar{0}_{E_1}$ *ou* $\bar{y} = \bar{0}_{E_2}$

pour tous $\bar{x}$ et $\bar{x}'$ de E_1, tous $\bar{y}$ et $\bar{y}'$ de E_2, et tout α de K. Les conditions **2.1, 2.2** et **2.3** expriment la bilinéarité du produit tensoriel.

Un tenseur est alors défini comme *toute* combinaison linéaire finie de produits tensoriels de vecteurs *quelconques* $\bar{x}^k$ de E_1 et $\bar{y}_k$ de E_2, c.à.d. :

$$\sum_{k=1}^{p} \bar{x}^k \bullet \bar{y}_k$$

pour p entier quelconque. C'est donc un élément de $E = E_1 \bullet E_2$.

Il est immédiat de montrer que :

* $E = E_1 \bullet E_2$ a une structure d'espace vectoriel
* la base de E induite par les bases $\{\bar{e}_i\}$ de E_1 et $\{\bar{e}'_j\}$ de E_2 est $\{\bar{e}_i \bullet \bar{e}'_j\}$.

* tout tenseur $\bar{x}^k \bullet \bar{y}_k$ de E se décompose sur la base $\{\bar{e}_i \bullet \bar{e}'_j\}$ de E de la façon suivante :

$$\bar{x}^k \bullet \bar{y}_k = (x^{ki}\bar{e}_i) \bullet (y_k^j \bar{e}'_j) \qquad \begin{array}{l} k = (1, \ldots, p) \\ i = (1, \ldots, n_1) \\ j = (1, \ldots, n_2) \end{array}$$

$$= x^{ki}\, y_k^j\, (\bar{e}_i \bullet \bar{e}'_j)$$

Nous avons donc le

Théorème 1. *Tout tenseur est une combinaison linéaire* finie *des éléments* $(\bar{e}_i \bullet \bar{e}'_j)$.

Théorème 2. *La composante du tenseur* $\bar{x}^k \bullet \bar{y}_k$ *sur le vecteur de base* $(\bar{e}_i \bullet \bar{e}'_j)$ de E est

$$x^{ki}\, y_k^j$$

où $\bar{x}^k = x^{ki}\, \bar{e}_i$ et $\bar{y}_k = y_k^j\, \bar{e}'_j$

* la base de $E_1^* \bullet E_2^*$ est $\{\underline{\varepsilon}^i \bullet \underline{\varepsilon}'^j\}$

Nous allons montrer que nous pouvons identifier les tenseurs définis comme ci-dessus et les formes bilinéaires sur $E_1^* \bullet E_2^*$.

3. SECONDE DEFINITION DES TENSEURS A PARTIR DES FORMES BILINEAIRES SUR E_1^* ET SUR E_2^*.

Soit la forme notée $T(\bar{x} \bullet \bar{y})$ sur $E_1^* \bullet E_2^*$, c'est-à-dire l'opérateur appliquant $E_1^* \bullet E_2^*$ dans K [1] [2]. Pour tout ocovecteur $\underline{f}$ de E_1^*, tout covecteur $\underline{g}$ de E_2^*, tout vecteur $\bar{x}$ de E_1, tout vecteur $\bar{y}$ de E_2, nous avons donc par définition :

3.1. * $T(\bar{x} \bullet \bar{y})\ (\underline{f})\ (\underline{g}) = \underline{f}(\bar{x}) \circ \underline{g}(\bar{x})$ est un élément de K.

Pour les éléments $\bar{x}^k$ de E_1, $\bar{y}_k$ de E_2, $\underline{f}$ de E_1^*, $\underline{g}$ de E_2^*, nous pouvons généraliser cette définition par

3.2. $T(\bar{x}^k \bullet \bar{y}_k)\ (\underline{f})\ (\underline{g}) = f(\bar{x}^k) \circ g(\bar{y}_k)$

Théorème 2. *L'opérateur* $T(\bar{x}^k \bullet \bar{y}_k)$ *est une forme bilinéaire sur* $E_1^* \bullet E_2^*$.

Démonstration

Pour tous $\underline{f}$ et $\underline{f}'$ de E_1^*, tout $\underline{g}$ de E_2^*, tous α et β de K, nous avons :

$T(\bar{x}^k \bullet \bar{y}_k)\ (\alpha\underline{f} + \beta\underline{f}')\ (\underline{g})$

$= \{\alpha\underline{f} + \beta\underline{f}'\}\ (\bar{x}^k) \circ \underline{g}(\bar{y}_k)$ d'après la définition 3.2.

$= \{\alpha\underline{f}\ (\bar{x}^k) + \beta\underline{f}'(\bar{x}^k)\} \circ g\ (\bar{y}_k)$ car E_1^* est un espace vectoriel.

$= \alpha\underline{f}\ (\bar{x}^k) \circ \underline{g}\ (\bar{y}_k) + \beta\underline{f}'(\bar{x}^k) \circ \underline{g}\ (\bar{y}_k)$

à cause de la propriété du produit $\circ$ dans K.

$$=\alpha T(\bar{x}^k \bullet \bar{y}_k)\,(\underline{f})\,(\underline{g}) + \beta T(\bar{x}^k \bullet \bar{y}_k)\,(\underline{f}')\,(\underline{g})$$

à cause de la définition **3.2**.

$$=\{\alpha T(\bar{x}^k \bullet \bar{y}_k)\,(\underline{f}) + \beta T(\bar{x}^k \bullet \bar{y}_k)\,(\underline{f}')\}\,(\underline{g})$$

Nous obtenons la linéarité par rapport à $\underline{f}$. La linéarité par rapport à g se démontre de la même façon.

4. ETUDE DE L'OPERATEUR T

Considérons maintenant l'opérateur T tel que $T(\underline{\bar{x}}^k \bullet \underline{\bar{y}}_k)$ soit une forme bilinéaire sur E_1^* et sur E_2^*, c'est-à-dire soit un élément de $L(E_1^* \bullet E_2^*; K)$. L'opérateur T applique $E_1 \bullet E_2$ sur les formes bilinéaires sur E_1^* et sur E_2^*.

Théorème 3. *L'opérateur T est linéaire.*

Démonstration

Montrons la relation :

4.1. $$T\{\alpha(\bar{x}^k \bullet \bar{y}_k) + \beta(\bar{x}'^i \bullet \bar{y}'_i)\} = \alpha T(\bar{x}^k \bullet \bar{y}_k) + \beta T(\underline{\bar{x}}'^i \bullet \bar{y}'_i)$$

pour tous $\bar{x}^k$, $\bar{x}'^i$ de E_1, tous $\bar{y}_k$ et $\bar{y}'_i$ de E_2, tous α et β de K. La sommation sur k va de 1 à p, la sommation sur i va de 1 à q. Les deux entiers p et q ne sont pas nécessairement égaux.

D'après les propriétés **2.1**, **2.2**, **2.3**, de la première définition des tenseurs, nous avons :

$$\alpha(\bar{x}^k \bullet \bar{y}_k) = (\alpha\bar{x}^k) \bullet \bar{y}_k = \bar{x}^k \bullet (\alpha\bar{y}_k)$$

que nous écrivons sans ambiguité $\alpha\underline{\bar{x}}^k \bullet \bar{y}_k$.

Pour tous $\underline{f}$ de E_1^* et $\underline{g}$ de E_2^*, nous avons :

$$T\{\alpha(\bar{x}^k \bullet \bar{y}_k) + (\bar{x}'^i \bullet \bar{y}'_i)\}\,(\underline{f})\,(\underline{g})$$

$$=\underline{f}(\alpha\underline{\bar{x}}^k) \bullet \underline{g}(\underline{\bar{y}}_k) + \underline{f}(\beta\underline{\bar{x}}'^i) \bullet \underline{g}(\bar{y}'_i)$$ d'après la seconde définition **3.2** et le théorème 2.

$$=\alpha(\bar{x}^k \bullet \bar{y}_k)\,(\underline{f})\,(\underline{g}) + \beta T\,(\bar{x}'^i \bullet \bar{y}'_i)\,(\underline{f})\,(\underline{g})$$ car $\underline{f}$ est un élément de E^*_1 et d'après la seconde définition **3.2**

$$=\{\alpha T(\bar{x}^k \bullet \bar{y}_k) + \beta T(\bar{x}'^i \bullet \bar{y}'_i)\}\,(\underline{f})\,(\underline{g})$$ CQFD

Théorème 4. *L'opérateur T est surjectif.*

Démonstration

Il faut montrer que, pour toute forme bilinéaire t sur E_1^* et sur E_2^*, il existe un élément unique $\bar{x}^k \bullet \bar{y}_k$ de $E_1 \bullet E_2$ tel que :

$$t = T(\bar{x}^k \bullet \bar{y}_k)$$

Posons $t(\underline{\varepsilon}^i)\,(\underline{\varepsilon}'^j) = t^{ij}$ et vérifions que

4.2. $t = T(t^{ij}\bar{e}_i \bullet \bar{e}'_j)$

Pour tout $\underline{f}$ de E_1^* et tout $\underline{g}$ de E_2^*, nous avons

$$\underline{f} = f_i\, \underline{\varepsilon}^i \qquad \text{(sommation de 1 à } \underline{n}_1\text{)}$$

$$\underline{g} = g_j\, \underline{\varepsilon}'^j \qquad \text{(sommation de 1 à } \underline{n}_2\text{)}$$

Calculons

$$t(\underline{f})\ (\underline{g}) = t(f_i\underline{\varepsilon}^i)\ (g_j\underline{\varepsilon}'^j)$$

$$= f_i\ g_j\ t(\underline{\varepsilon}^i)\ (\underline{\varepsilon}'^j)$$

car t est une forme bilinéaire sur E_1^* et sur E_2^*

$$= f_i g_j\ t^{ij}$$

Montrons qu'il existe l'opérateur T appliquant $E_1 \bullet E_2$ sur la forme bilinéaire t. Si les *dimensions sont finies*, nous avons :

$$T\left\{t^{ij}\ (\bar{e}_i \bullet \bar{e}'_j)\right\}(\underline{f})\ (\underline{g})$$

$= T\left\{(t^{ij}\bar{e}_i) \bullet \bar{e}'_j\right\}(\underline{f})\ (\underline{g})$ d'après la relation **2.1.**

$= \underline{f}\,(t^{ij}\bar{e}_i) \circ \underline{g}(\bar{e}'_j)$ d'après la définition **3.2.**

$= t^{ij}\,\underline{f}(\bar{e}_i) \circ \underline{g}\ (\bar{e}'_j)$

$= t^{ij}\, f_i\, g_j$ CQFD.

L'unicité de $t^{ij}\bar{e}_i \bullet \bar{e}'_j$ est immédiat car $\{\bar{e}_i\}$ et $\{\bar{e}'_j\}$ sont des bases de E_1 et de E_2.

Remarquons que si les *dimensions sont infinies*, nous n'avons plus la surjectivité.

Théorème 5. *L'opérateur T est injectif.*

Démonstration

Montrons que le noyau de T se réduit à $\{\bar{O}\}$ de $E_1 \bullet E_2$; c'est-à-dire la condition :

$$T\left\{t^{ij}\,(\bar{e}_i \bullet \bar{e}'_j)\right\} = 0 \qquad \text{implique } t^{ij} e_i \bullet e'_j = \bar{O}$$

D'après le théorème 1, tout élément de $E_1 \bullet E_2$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire

$$t^{ij}\ (\bar{e}_i \bullet \bar{e}'_j)$$

Comme le système $\{\bar{e}_i \bullet \bar{e}'_j\}$ forme une base de $E_1 \bullet E_2$ c'est-à-dire est un système libre de générateurs, la condition

$$\bar{0} = T(t^{ij}\bar{e}_i \bullet \bar{e}'_j)$$

$= t^{ij}\, T(\bar{e}_i \bullet \bar{e}'_j)$ car T est linéaire (théorème 3) implique :

$$t^{ij} \equiv 0 \qquad \text{pour tout } i \text{ et tout } j$$

ce qui entraîne :

$$t^{ij}\bar{e}_i \bullet \bar{e}'_j = \bar{0} \qquad \text{CQFD.}$$

5. CONCLUSION ET REMARQUES FINALES

1° Rappelons que les opérateurs T et t sont définis par :

* $T\,(\bar{x}^k \bullet \bar{y}_k)(f)(g) = f(\bar{x}^k) \bullet g\,(\bar{y}_k)$

  pour tous $\bar{x}^k$ de E_1 et $\bar{y}_k$ de E_2.

* $t\,(f)(g)$ est un élément de K avec la condition de bilinéarité par rapport à f de E_1^* et g de E_2^*.

Théorème 6. *Nous avons montré que si les* dimensions sont finies *l'opérateur T, défini par*

$$T(\bar{x}^k \bullet \bar{y}_k) = t$$

où t est une forme bilinéaire sur E_1^* et E_2^* pour tous $\bar{x}^k$ de E_1 et $\bar{y}_k$ de E_2, est une *bijection linéaire* (Théorème 3, Théorème 4, Théorème 5), d'où

Théorème 7. *Le produit tensoriel* $E_1 \bullet E_2$ *de deux espaces vectoriels* E_1 *et* E_2 *de dimensions finies et l'espace vectoriel* $L(E_1^* \bullet E_2^*;K)$ *des formes bilinéaires sur* E_1^* *et* E_2^* *sont isomorphes.*

Il est bon de souligner que si E_1 et E_2 sont de *dimensions infinies*, l'opérateur T n'est plus surjectif et l'identification n'est plus possible.

2° La généralisation directe du résultat que nous venons de démontrer montre que les espaces vectoriels

$$\underbrace{E \bullet E \bullet \dots \bullet E}_{\text{p-fois}} \quad \text{et} \quad E^{\bullet p}$$

sont isomorphes. Nous pouvons les identifier et écrire :

$$\underbrace{E \bullet E \bullet \dots \bullet E}_{\text{p-fois}} = \bigotimes_{i=1}^{p} E_i = E^{\bullet p}$$

Théorème 8. $E^{*\bullet p}$ *et* $E^{\bullet p}$ sont duaux dans le cas de dimensions finies.

Démonstration

Considérons l'espace vectoriel $E^{*\bullet p}$ et l'espace dual $E^{\bullet p^*}$ de $E^{\bullet p}$. Nous obtenons le résultat cherché en généralisant le théorème 6. Remarquons aussi qu'ils sont construits sur le même corps. Ils ont même dimension car, si n = dim E, nous avons

$$\dim E^{*\otimes p} = \underline{n}^p$$

$$\dim E^{\otimes p^*} = \dim E^{\otimes p} = \underline{n}^p$$

dans le cas de dimension *finie*.
Ils sont donc des espaces vectoriels isomorphes [4]. Nous pouvons les identifier

$$E^{\otimes p^*} = E^{*\otimes p} \qquad \text{CQFD.}$$

4° Si E_1 et E_2 sont deux espaces vectoriels sur le même corps K et de dimensions finies, à un opérateur linéaire A de $L(E_1 ; E_2)$ nous pouvons associer de façon bijective le tenseur mixte A_T de $E_2 \otimes E_1^*$ d'ordre deux, une fois contravariant, une fois covariant, tel que:

$$\underline{\Phi}(Ax) = A_T(\underline{\Phi})(x)$$

pour tout Φ de E_2^* et tout $\overline{x}$ de E_1. Pour $\underline{\overline{x}}$ de E_1, nous avons:

$$\overline{y} = A\overline{x} \qquad \overline{y} \text{ étant un élément de } E_2$$

$$= A(\underline{x}^i \underline{\overline{e}}_i) = \underline{x}^i A\underline{\overline{e}}_i$$

$$A\overline{e}_i = A_i^j \overline{e}'_j \qquad \text{où } i = (1, \ldots, n_1)$$
$$j = (1, \ldots, n_2)$$

$$A_i^j = \underline{\varepsilon}'^j (A\overline{e}_i)$$

Les nombres A_i^j sont les éléments de la matrice [A] à n_2-lignes et à n_1-colonnes représentant l'opérateur linéaire A de $L(E_1 ; E_2)$ dans les bases de E_1 et de E_2.

Le tenseur mixte A_T de $E_2 \otimes E_1^*$ associé de façon bijective à A se décompose sur la base $\{\overline{e}'_j \otimes \underline{\varepsilon}^i\}$ en

$$A_T = A_i^j \overline{e}'_j \otimes \underline{\varepsilon}^i$$

telles que ses composantes mixtes

$$A_i^j = A_T(\underline{\varepsilon}'^j)(\overline{e}_i)$$

$$= \underline{\varepsilon}'^j (A\overline{e}_i)$$

soient les mêmes que les éléments A_i^j de la matrice [A] de A dans les bases de E_1 et de E_2.

Le tenseur mixte A_T d'ordre deux est représenté dans la base $\{\overline{e}'_j \otimes \underline{\varepsilon}^i\}$ par une matrice à n_2 lignes et à n_1 colonnes qui est la même matrice [A] (*voir* [5]).

A l'opérateur A de $L(E_1 ; E_2)$, nous pouvons associer l'opérateur transposé A_t de A appartenant à $L(E_2^* ; E_1^*)$ défini par:

$$\underline{\Phi}(A\overline{x}) = A_t(\varphi)(\overline{x})$$

Ensuite, en reprenant le raisonnement ci-dessus, nous pouvons associer à l'opérateur transposé A_T le tenseur mixte A_{tT} de $E_1^* \bullet E_2^*$.

5° Si g est une forme bilinéaire sur l'espace vectoriel E sur K de dimension n, il existe un tenseur g_T covariant d'ordre 2 de $E^{*\bullet 2}$ tel que pour tous $\bar{x}$ et $\bar{y}$ de E

$$g_T(\bar{x})\ (\bar{y}) \qquad \text{est un élément de K.}$$

Le tenseur *covariant* g_T se décompose sur la base ($\underline{\varepsilon}^i$ o $\underline{\varepsilon}^j$) induite par une base ($\bar{e}_i$) de E de base duale ($\underline{\varepsilon}^j$) suivant la formule:

$$g_T = g_{ij}\ (\underline{\varepsilon}^i \bullet \underline{\varepsilon}^j)$$

Matriciellement gT (ou$g$) est représenté dans la base choisie par *une matrice-ligne à* $n \times n = n^2$ colonnes dont la disposition est donnée dans les références [5] [6]

6° Si G est une forme bilinéaire sur E*, le tenseur GT contravariant d'ordre deux défini par:

$$GT\ (\underline{f})\ (\underline{f}') = G(\underline{f}, \underline{f}')$$

pour $\underline{f}$ et $\underline{f}'$ de E* se décompose sur la base ($\bar{e}_i \bullet \bar{e}_j$) en

$$GT = G^{ij}\ (\bar{e}_i \bullet \bar{e}_j)$$

Dans cette base, G_T (ou G) est représenté par une *matrice-colonnes à* $n \times n = n^2$ *lignes* dont la dispòsition est donnée dans les références [5] [6].

7° Si M est une forme bilinéaire sur E $\bullet$ E*, le tenseur mixte M_T une fois contravariant, une fois covariant se décompose sur la base ($\bar{e}_i \circ \varepsilon^j$) suivant:

$$M_T = M^i_j\ (\bar{e}_i \bullet \underline{\varepsilon}^j)$$

et est représenté dans la base ($\bar{e}_i \bullet \underline{\varepsilon}^j$) par une *matrice carrée à n lignes et à n colonnes.*

Souvent, les praticiens du calcul matriciel représentent abusivement par la *même* matrice les matrices d'élements

$$[A^i_j] \quad ; \quad [A^{ij}] \quad \text{et} \quad [A_{ij}]$$

Les natures de ces matrices sont différentes; il doit en être de même pour leurs dispositions.

C'est ainsi que nous voyons la relation

$$x_i = g_{ij}\, x^j$$

écrite abusivement sous la disposition matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ g_{n1} & g_{n2} & & g_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}^1 \\ \underline{x}^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{x}^n \end{bmatrix}$$

($\underline{x}^i$) est une matrice-colonne, mais ($\underline{x}_i$) est une matrice-ligne (et non une matrice-colonne !..)

Cet inconvénient (entre autres avantages) n'existe pas si nous l'écrivons suivant les règles données dans les références [5] [6] sous la forme :

$$[\underline{x}_1 \quad \underline{x}_2 \dots \underline{x}_n] = [g_{11}\, g_{12} \dots g_{nn}] . \begin{bmatrix} \underline{x}^1 \\ \underline{x}^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{x}^n \end{bmatrix}$$

où l'opérateur . dans le second membre désigne la contraction du vecteur-ligne par un vecteur-colonne. Dans le premier membre, nous obtenons bien un vecteur-ligne.

8° Pour terminer, rappelons que la convention d'écriture d'Einstein est plus qu'une simple convention. Elle est essentielle car elle met en évidence les propriétés de covariance et de contravariance (*voir* références [6]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. LICHNEROWICZ. — *Algèbre et Analyse linéaires,* Masson et C^ie^, 1956, p. 114.

[2] Voir par exemple D. KASTLER. — *Introduction à l'Electrodynamique Quantique,* Dunod, Paris, 1961, chapitre II.

[3] RAOELINA ANDRIAMBOLOLONA, D. RAMIARAMANANA
I. *De la définition intrinsèque des tenseurs et de son utilisation pratique en calcul tensoriel. Changement de bases.* Ann. de l'Univ. de Madagascar, série Sc, Nat. et Math., n° 11 (1974), pp. 19-43.

II. *De la définition intrinsèque des tenseurs et de son utilisation pratique en calcul tensoriel. Changement de bases.* Ann. Univ. de Madagascar, série Sc. Nat. et Math., n° **12** (1975), pp. 1-27.

[4] *Pour l'isomorphisme des espaces vectoriels,* voir V. VOIEVODINE, Algèbre linéaire, Edition Mir, Moscou, 1976, p. 65.

[5] RAOELINA ANDRIAMBOLOLONA — *Représentation matricielle des bases et des tenseurs. Etude compacte.* Ann. Univ. de Madagascar, série Sc. Nat. et Math., n° **14** (1977), pp. 1-14.
Voir aussi [3] pour une étude non compacte.

[6] RAOELINA ANDRIAMBOLOLONA — I. *Etude intrinsèque de la contraction des tenseurs.* Ann. Univ. de Madagascar, série Sc. Nat. et Math., n° **14** (1977), pp. 31-42.
RAOELINA ANDRIAMBOLOLONA — II. *Représentation matricielle des contractions des tenseurs par d'autres tenseurs.* Ann. Univ. de Madagascar n° **14** (1977), pp. 43-58.