

DETERMINATION DES CONTRAINTES DANS LA SECTION TRIANGULAIRE D'UNE POUTRE EN TORSION PURE PAR LA METHODE DE L'ANALOGIE RHEOELECTRIQUE

par Jacques L. FERON et Pierre FOREY

Laboratoire de Mécanique de
l'Établissement d'Enseignement Supérieur Polytechnique
Université de Madagascar

RESUME

Après un rappel du problème général de la torsion pure des cylindres, qui se ramène à un problème de Neumann ou de Dirichlet, nous examinons la solution analytique pour un cylindre de section en triangle équilatéral, solution que nous approcherons à l'aide de l'analogie rhéoelectrique.

Nous donnons le principe de cette analogie et nous décrivons le dispositif expérimental et la mesure. La précision obtenue dans les mesures nous permet d'envisager l'étude de poutres de sections quelconques sans le support d'une solution analytique.

INTRODUCTION

La détermination des contraintes dans une poutre en torsion se ramène à la résolution d'un problème de Neumann ou d'un problème de Dirichlet — Ces problèmes sont résolubles analytiquement dans un nombre limité de cas où les sections de poutres sont des figures géométriques simples.

Le but de cette étude est de montrer que, pour les cas où la solution analytique des problèmes est inconnue, l'analogie rhéoelectrique peut être prise comme solution numérique approchée.

Nous comparons, ici, les résultats expérimentaux aux résultats théoriques connus pour une section en triangle équilatéral — Les trois symétries axiales du triangle équilatéral nous permettent de vérifier les résultats sur un sixième du triangle seulement.

Problème général de la torsion des cylindres. (1)

Un cylindre de génératrices parallèles à Oz n'est soumis à aucune force sur sa surface latérale ni dans sa masse. Sur chacune de ses bases, il est soumis à des forces formant un système équivalent à un couple M d'axe parallèle à Oz. On peut étudier le problème par les deux méthodes de l'Elasticité.

Méthode de LAME, par les équations liant les déplacements.

On pose à priori que le déplacement ξ a pour composantes

$$\xi = -kzy \quad \eta = kzx \quad \zeta = k\varphi(x,y)$$

k étant une constante et φ une fonction à déterminer.

Les équations de LAME se réduisent alors à :

$$\Delta \varphi = 0$$

La fonction φ est une fonction harmonique.

Les contraintes valent

$$\Gamma_{zx} = \mu k \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) \quad \text{et} \quad \Gamma_{zy} = \mu k \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right)$$

Les conditions aux limites sur la surface latérale $n(O, \alpha, \beta)$ se résument à :

$$T_x = 0$$

$$T_y = 0$$

$$T_z = \alpha \Gamma_{zx} + \beta \Gamma_{zy} = 0$$

ou encore :

$$\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \alpha y - \beta x$$

$$\frac{d\varphi}{dn} = \alpha y - \beta x$$

La fonction $\varphi(x,y)$ qui doit être régulière et uniforme est donc déterminée par un problème de Neumann. La condition de possibilité du problème de Neumann est satisfaite car :

$$\int_C \frac{d\varphi}{dn} ds = \int_C (\alpha y - \beta x) ds = \int_C y dy + x dx = 0$$

Les conditions aux limites sur les faces extrêmes sont satisfaites. Le moment des forces sur une face extrême doit être égal à M , donc

$$M = \iint_S (x \Gamma_{yz} - y \Gamma_{xz}) dS$$

$$M = \mu k \iint_S \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) x - y \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) \right] dS$$

où $M = \mu k J$

J est l'inertie de torsion de la section et ne dépend que de la forme de la section.

Méthode de BELTRAMI, par les équations liant les contraintes

On pose à priori que les seules contraintes non nulles sont Γ_{xz} et Γ_{zy} .

Les équations dynamiques se réduisent à

$$\frac{\partial \Gamma_{xz}}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial \Gamma_{yz}}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial \Gamma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \Gamma_{zy}}{\partial y} = 0$$

On satisfait à ces trois équations en posant :

$$\Gamma_{zx} = \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \quad \Gamma_{zy} = - \frac{\partial \psi_1}{\partial x}$$

ψ_1 est une fonction arbitraire de x et de y . C'est une fonction de contraintes.

Les équations de BELTRAMI se réduisent à

$$\Delta \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right) = 0 \quad \text{et} \quad \Delta \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right) = 0$$

$$\text{ou} \quad \frac{\partial}{\partial x} (\Delta \psi_1) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial y} (\Delta \psi_1) = 0$$

$$\text{soit} \quad \Delta \psi_1 = -2K \quad (K = \text{constante})$$

Les conditions aux limites sur la surface latérale donnent :

$$\alpha \frac{\partial \psi_1}{\partial y} - \beta \frac{\partial \psi_1}{\partial x} = 0$$

$$\text{ou} \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{dx}{ds} = \frac{d\psi_1}{ds} = 0$$

La condition est donc $\psi_1 = \text{constante}$ sur le contour (c).

La détermination de $\psi_1(x,y)$ se ramène à celle d'une fonction harmonique. En effet, posons :

$$\psi_1 = K \left[\psi(x,y) - \frac{x^2 + y^2}{2} \right]$$

Il suffit maintenant de résoudre

$$\Delta\psi = 0$$

avec la condition $\psi = \frac{x^2 + y^2}{2} + c$ sur le contour (c)

$c = \text{constante}$.

La fonction harmonique ψ qui doit être régulière est déterminée par un problème de Dirichlet. Si ψ est déterminée, on a alors :

$$\Gamma_{zx} = K \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} - y \right) \text{ et } \Gamma_{zy} = -K \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - x \right)$$

Comparaison des deux méthodes

La comparaison des expressions des contraintes nous amène à écrire :

$$K = \mu k$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} ; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

donc l'inertie de torsion de la section peut s'écrire :

$$J = \iint_S \left[\left(x - \frac{\partial\psi}{\partial x} \right) x - y \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} - y \right) \right] dS$$

Cas particulier d'une poutre de section en triangle équilatéral [2]

Si nous prenons les axes x et y passant par le centre d'inertie du triangle équilatéral de hauteur $3a$ (figure I) l'équation du contour (c) est alors :

$$(x - a)(x - y\sqrt{3} + 2a)(x + y\sqrt{3} + 2a) = 0$$

Dans ce cas la solution du problème de Dirichlet est

$$\psi = -\frac{1}{6a} (x^3 - 3xy^2) + \frac{2a^2}{3} + c$$

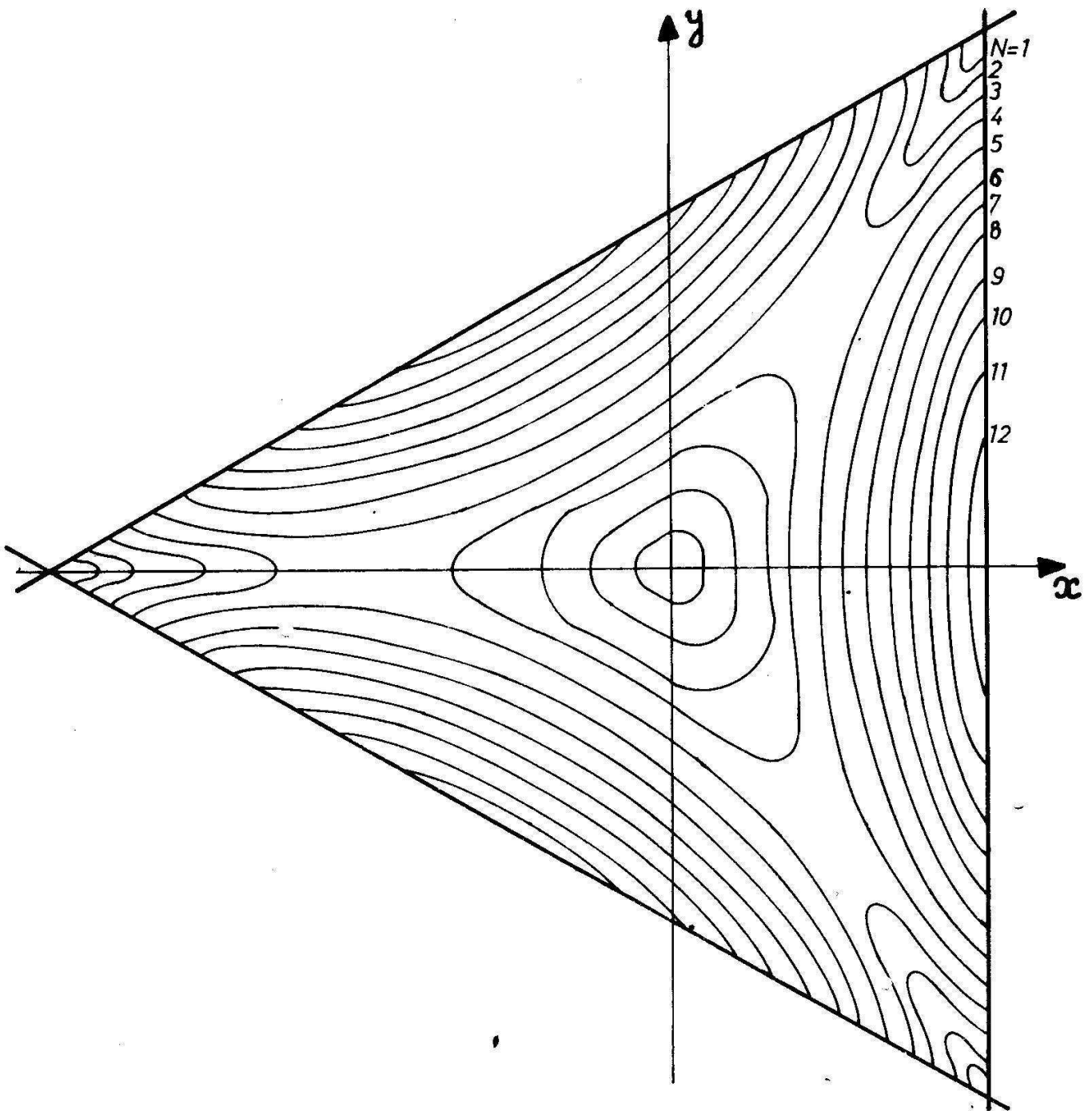


Fig. I

**Courbes iso-contraintes N
sur tout le triangle.
Détermination analytique.**

On peut alors calculer analytiquement les contraintes et l'inertie de torsion :

$$J = \frac{9\sqrt{3}}{5} a^4$$

$$\Gamma_{zx} = \frac{5M}{9\sqrt{3}a^4} y \left(\frac{x}{a} - 1 \right)$$

$$\Gamma_{zy} = \frac{5M}{9\sqrt{3}a^4} \left(x - \frac{y^2 - x^2}{2a} \right)$$

Analogie rhéoélectrique

Le problème de Dirichlet ou le problème de Neumann peut être résolu, lorsque le calcul est trop complexe par la méthode de l'analogie rhéoélectrique.

Principe

Si une lame plane conductrice de l'électricité, homogène, isotrope, et d'épaisseur constante (eau dans un bassin de profondeur constante) est parcourue par un courant électrique permanent, le potentiel électrique $V(x,y)$ vérifie l'équation $\Delta V = 0$. Le contour (c) est alors matérialisé par des électrodes.

* Application au problème de Neumann

Si on fait passer par les différentes électrodes des intensités déterminées $i = B(\alpha y - \beta x)$ on résout le problème de Neumann,

($i = \frac{s}{\rho} \frac{dV}{dn}$, s : section de l'électrode et ρ : résistivité de la lame conductrice).

La solution du problème de Neumann est donnée par la mesure de V .

* Application au problème de Dirichlet

Si on porte les différentes électrodes à des potentiels déterminés $V = A \left(\frac{x^2 + y^2}{2} + c \right)$ on résout le problème de Dirichlet. C'est cette solution

que nous préférons car il est plus aisé d'afficher des potentiels donnés plutôt que de produire des intensités de courant données. On amène au contact de l'eau en un point P, une sonde reliée à un voltmètre électronique de grande impédance (aucun courant ne passe dans la sonde). Nous mesurons ainsi le potentiel électrique en P d'où la solution expérimentale du problème de Dirichlet.

J. dispositif expérimental

La cuve est en P.V.C., ses dimensions sont 1m x 1m x 0,15m. Elle repose sur un bâti métallique très rigide et comporte un système de vidange.

Au-dessus de la cuve, un système de deux chariots mobiles assure le déplacement de la sonde de mesure pour l'exploitation du champ électrique. Les coordonnées du point P où se fait la mesure, sont liées directement sur deux règles graduées donnant la position des chariots.

Le modèle du contour (c) est constitué par trois plaques isolantes en plexiglass sondées entre elles, de longueur 60 cm ($= 2a\sqrt{3}$), sur lesquelles nous avons collé des plaques de cuivre comme électrodes. Pour afficher sur ces électrodes, la répartition continue $V = A\left(\frac{x^2 + y^2}{2} + c\right)$, il nous faudrait une infinité d'électrodes. Nous avons approché cette répartition continue par une répartition discrète. Nous ayant fixé une répartition de potentiel variant de 0 ($x = a, y = 0$) à 9 volts ($x = a, y = a\sqrt{3}$) et une raison de 0,6 Volt, nous avons calculé les points où $V_n = (0,3 + n 0,6)$ Volts. Entre ces points, nous avons placé des plaques de largeurs différentes, que l'on a porté aux potentiels 0 ; 0,6 Volt ; ..., n 0,6 Volt

Le potentiel maximum de 9 Volts est donné par un générateur de basse fréquence Metrix de type 817 A. Nous utilisons le courant alternatif pour éviter les effets de piles et il nous est apparu que la fréquence de 5 000 Hz donne les meilleurs résultats. Les autres potentiels sont pris aux bornes de résistances montées en série entre 0 et 9 Volts.

L'appareil détecteur du potentiel V est un Voltohmmètre électronique Metrix de type VX 304 A.

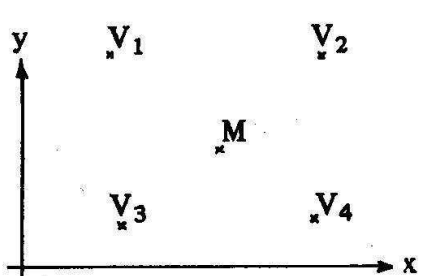
Mesure

Les constantes A et c de la loi $V = A\left(\frac{x^2 + y^2}{2} + c\right)$ sur le contour (c) sont déterminées par les valeurs du potentiel aux deux points :

$$\left. \begin{array}{l} x = 17,32 \text{ cm} \quad y = 0 \quad V = 0 \\ x = 17,32 \text{ cm} \quad y = 30 \text{ cm} \quad V = 9 \text{ Volts} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A = 0,02 \text{ Volt/cm}^2 \\ c = -150 \text{ cm}^2 \end{array}$$

A l'aide de la sonde, on relève les potentiels en des points distants de 1 cm.

On calcule aisément la valeur de $\frac{\Delta V}{\Delta x}$ et $\frac{\Delta V}{\Delta y}$ au centre M d'un carré de côté $b = 1 \text{ cm}$.



$$\frac{\Delta V}{\Delta x} = \frac{1}{2b} [V_2 + V_4 - (V_1 + V_3)]$$

$$\frac{\Delta V}{\Delta y} = \frac{1}{2b} [V_1 + V_2 - (V_3 + V_4)]$$

On assimile alors $\frac{\Delta V}{\Delta x}$ et $\frac{\Delta V}{\Delta y}$ aux dérivées partielles en M.

L'analogie rhéoelectrique $V = A \psi$ telle que

$$\left. \begin{array}{l} \Delta \psi = 0 \\ \psi = c + \frac{x^2 + y^2}{2} \text{ sur } (c) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A \Delta \psi = \Delta V = 0 \\ A \psi = A(c + \frac{x^2 + y^2}{2}) = V \text{ sur } (c) \end{array} \right.$$

nous permet de déduire les valeurs des dérivées partielles de

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{A} \frac{1}{2b} \left[V_2 + V_4 - (V_1 + V_3) \right]$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{1}{A} \frac{1}{2b} \left[V_1 + V_2 - (V_3 + V_4) \right]$$

A partir des valeurs de $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ et $\frac{\partial \psi}{\partial y}$ nous pouvons calculer l'inertie de torsion par une intégration :

$$J = \iint_S \left[\left(x - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) x - y \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - y \right) \right] dS = \frac{M}{\mu k}$$

et ensuite passer au calcul direct des contraintes :

$$\Gamma_{zx} = \frac{M}{J} \left[\frac{1}{2Ab} \left[V_1 + V_2 - (V_3 + V_4) \right] - y \right]$$

$$\Gamma_{zy} = -\frac{M}{J} \left[\frac{1}{2Ab} \left[V_2 + V_4 - (V_1 + V_3) \right] - x \right]$$

Résultats expérimentaux

A l'aide des valeurs expérimentales du potentiel et de ses dérivées nous avons évalué l'inertie de torsion de la section :

$$J = \sum_i \left[x_i^2 + y_i^2 - \frac{x_i}{A} \left(\frac{\Delta V}{\Delta x} \right)_i - \frac{y_i}{A} \left(\frac{\Delta V}{\Delta y} \right)_i \right] \Delta S_i$$

ΔS_i étant une petite surface de 1 cm^2 et les $\left(\frac{\Delta V}{\Delta x} \right)_i$, $\left(\frac{\Delta V}{\Delta y} \right)_i$, x_i , y_i ont les valeurs prises au centre de S_i .

Nous avons obtenu une valeur de l'inertie de torsion égale à $28,38 \text{ dm}^4$ alors que la valeur calculée analytiquement est de 28 dm^4 ce qui implique une erreur de 1,4 %.

Nous avons également tracer les courbes isocontraintes expérimentales (figure III) déduites des valeurs du potentiel.

Elles ont la forme $\frac{J}{M} \sqrt{\Gamma_{xy}^2 + \Gamma_{yz}^2} = 2N$, N étant une constante entière variant de 0 à 13.

Ces courbes expérimentales sont à comparer aux courbes isocontraintes déterminées analytiquement (figure II).

PRECISION

Les courbes isocontraintes sont similaires et se superposent sauf au voisinage immédiat des électrodes. Nous pensons que cette erreur est une erreur systématique qui peut être diminuée par l'augmentation du nombre d'électrodes. D'après les valeurs numériques comparées, cette erreur est au plus de 15 % au voisinage immédiat des électrodes.

Dans le corps de la poutre nous pouvons affirmer que la précision est meilleure que 4 %, ce qui est en accord avec la précision des mesures de la position et du potentiel à l'aide des appareils précités.

CONCLUSION

Les résultats obtenus nous permettent d'affirmer que l'évaluation expérimentale du champ de contraintes par l'analogie rhéoélectrique est suffisamment précise pour pouvoir employer cette méthode à des poutres de section quelconque dont le calcul n'a pas de solution analytique.

La détermination du champ de contraintes sera d'autant plus précise que la répartition discrète du potentiel sur le contour sera plus proche de la loi continue, c'est-à-dire que le nombre de plaques-électrodes sera élevé.

REMERCIEMENTS

Nous remercions le Laboratoire de Physique de la Faculté des Sciences pour le matériel qu'il a aimablement mis à notre disposition.

Nous remercions également le personnel technique de l'Etablissement d'Enseignement Supérieur Polytechnique pour son aide à la réalisation de cette expérience.

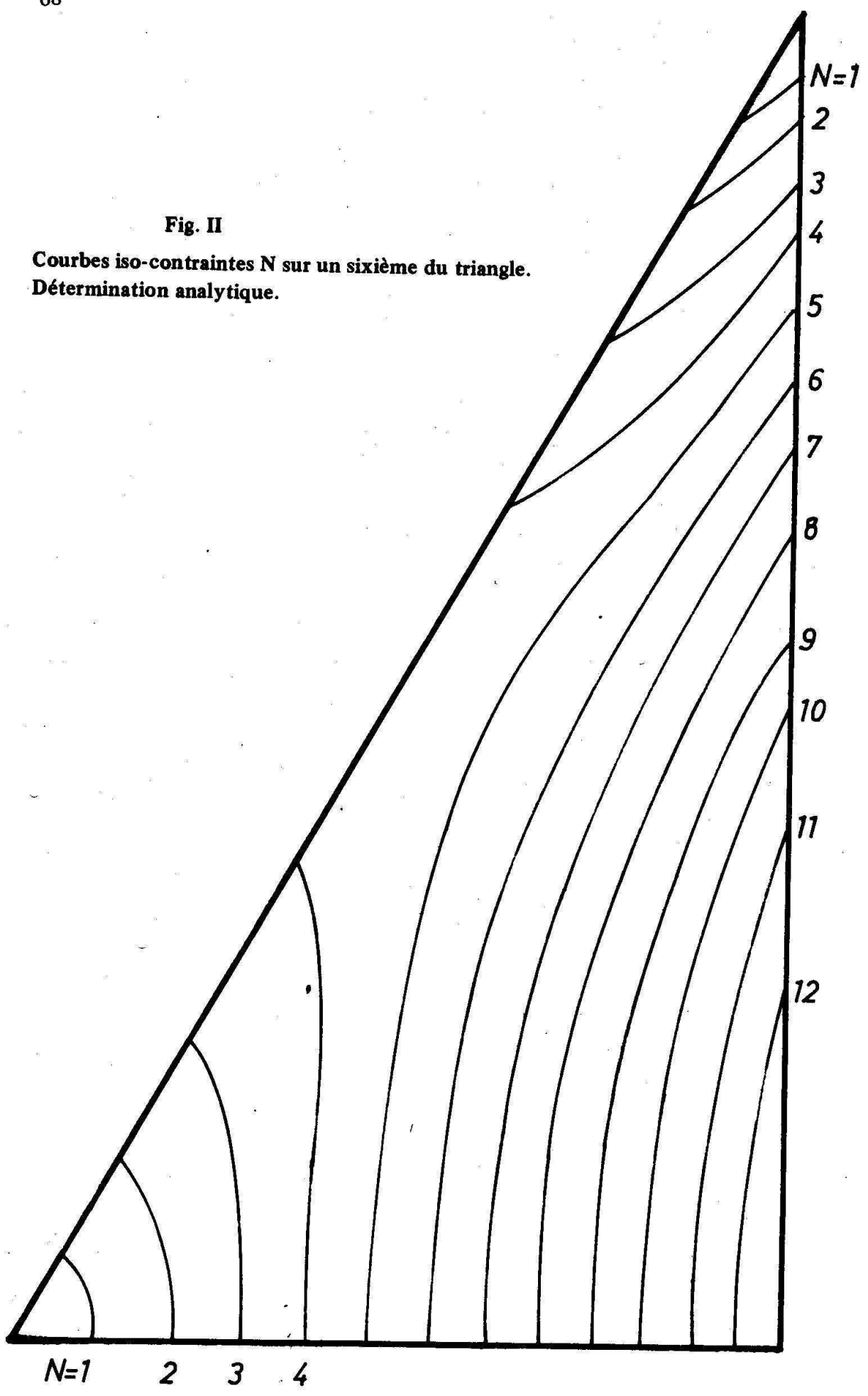
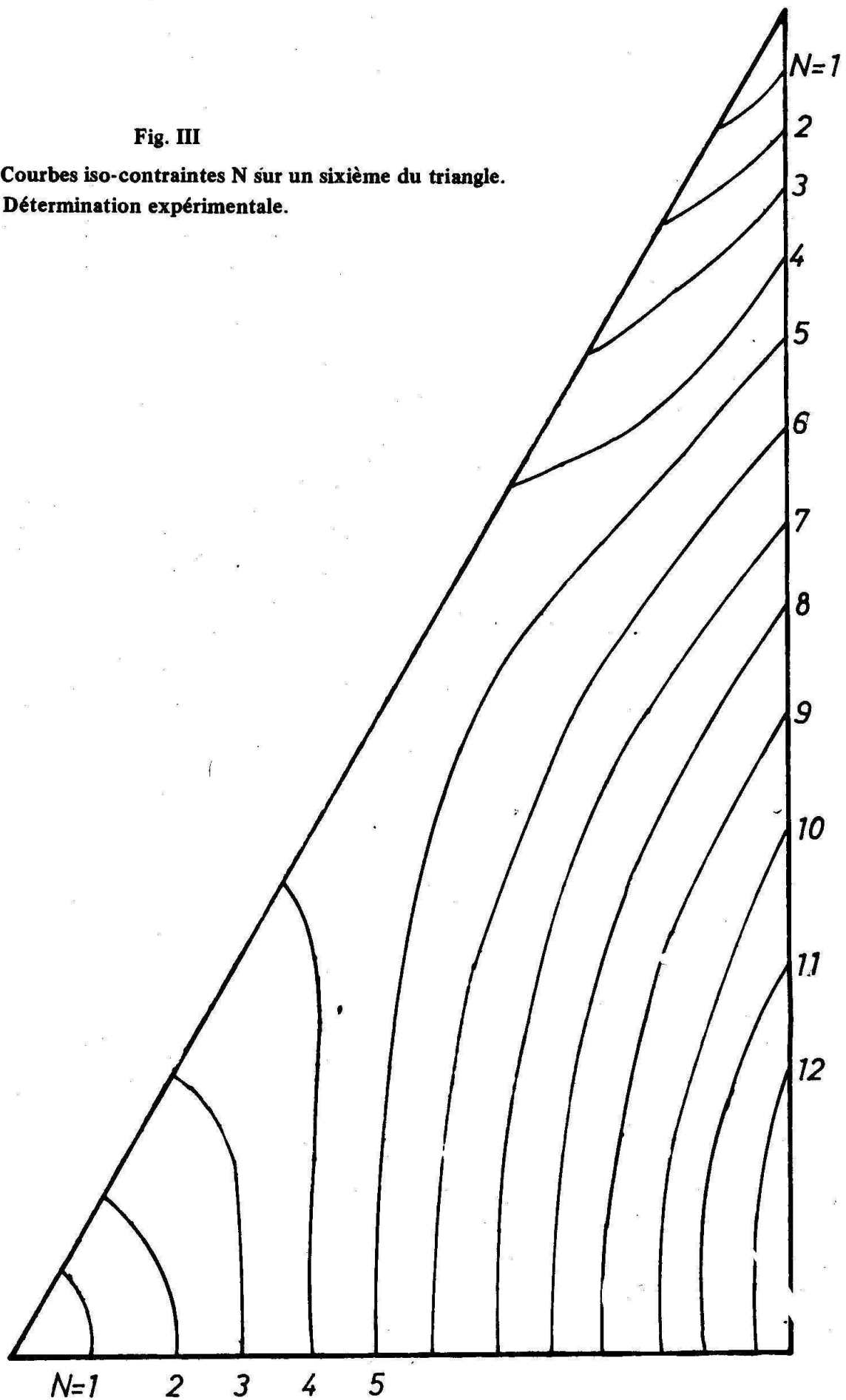


Fig. II
Courbes iso-contraintes N sur un sixième du triangle.
Détermination analytique.

Fig. III
Courbes iso-contraintes N sur un sixième du triangle.
Détermination expérimentale.



REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- (1) MANDEL J. – Cours de mécanique des milieux continus, Ed. Gauthier-Villars, Paris, 1966, pages 512 – 519.
- (2) L'HERMITE R. – Résistance des matériaux théorique et expérimentale. Ed. Dunod, Paris, 1954, page 204.



