Sciences de la Nature et Mathématiques, N° 14, 1977.

II. – REPRESENTATION MATRICIELLE DES CONTRACTIONS DES TENSEURS PAR D'AUTRES TENSEURS.

par RAOELINA ANDRIAMBOLOLONA

Laboratoire de Physique
Faculté des Sciences – B.P. 138
Université de Madagascar
Antananarivo – Madagascar.

RESUME

Nous avons donné les représentations matricielles des tenseurs d'ordre quelconque. Nous montrons que les contractions des tenseurs dont nous avons donné l'étude intrinsèque dans la première partie, correspondent à introduire les décompositions en blocs de matrices et à définir les produits droit et gauche de matrices de matrices à l'aide de règles de calcul. Nous obtenons ainsi la représentation matricielle des tenséurs contractés.

Les règles de calcul énoncées pour les contractions respectent automatiquement les dispositions en ligne-colonne que nous avons définies dans un autre travail. Elles n'introduisent pas non plus aucune inconsistance dans le formalisme et soulignent les propriétés de covariance et de contravariance ce qui n'est guère le cas quand on représente par exemple le tableau des éléments $M_{\alpha\beta}$ sous forme de matrice où α est un indice de ligne et β un indice de colonne.

Nous voyons aussi l'importance de la convention de sommation d'Einstein ; celle-ci n'est pas uniquement une question de notation ou de convention comme on le pense souvent [6] ; elle est essentielle car elle met en évidence les propriétés de covariance et de contravariance des expressions considérées.

ABSTRACT

Matricial representation of any order tensors has been given in [2] [3] [4] . *Tensor contractions the intrinsic study of which is made in the first part of the present work are shown to introduce the splitting of matrices into matrix blocks and to define left and right product of matrix blocks. Matricial representation of contracted tensors are thus obtained.*

Calculation rules stated for contractions lead to the automatic checking of line-column disposition rules which are quoted in the references [2] [3] [4]. *No inconsistency is introduced in the formalism ; covariance and countervariance properties are kept on. This is not the case when* $M_{\alpha\beta}$ *element tableau is arranged as a matrix in which* α *is considered as line-index and* β *as column index.*

The importance of Einstein's summation convention is to be stressed too. It is not a notation or convention matter uniquely as commonly believed [6]. *Einstein's summation convention is essential because covariance and countervariance properties of expressions thus obtained become obvious.*

1. *INTRODUCTION*

Nous avons présenté dans la référence [1] l'étude *intrinsèque* des contractions des tenseurs par un autre tenseur.

Dans les références [2] [3] [4], nous avons donné les représentations matricielles des bases et des tenseurs. En particulier, dans la référence [5], nous avons montré que, de façon générale, les composantes

$$(1.1) \qquad m^{i_1\ i_2 \ldots\ i_k}_{j_1\ j_2 \ldots\ j_k}$$

d'un tenseur mixte m dans la base induite par les produits tensoriels des bases des espaces vectoriels à partir desquels est formé l'espace vectoriel de m peut être représenté par une matrice [M] dont la ligne ℓ et la colonne h de l'élément M^{ℓ}_{n} de [M] sont déterminées par les relations

$$(1.2) \quad \ell = n_k\, n_{k-1} \ldots n_3\, n_2(i_1-1) + n_k\, n_{k-1} \ldots n_3(i_2-1) + \ldots + $$
$$+ n_k\, n_{k-1} \ldots n_{j+1}(i_j-1) + \ldots + n_k(i_{k-1}-1) + i_k$$

$$(1.2) \quad h = m_{k'}\, m_{k'-1} \ldots m_3\, m_2(j_1-1) + m_{k'}\, m_{k'-1} \ldots m_3(j_2-1) + \ldots +$$
$$+ m_{k'}\, m_{k'-1} \ldots m_{r+1}(j_r-1) + \ldots + m_{k'}(j_{k'-1}-1) + j_{k'}$$

$$(1.3) \quad \text{où} \quad i_\alpha = (1, \ldots, n_k) \quad \text{pour} \quad \alpha = (1, \ldots, k)$$
$$j_\beta = (1, \ldots, m_{k'}) \quad \text{pour} \quad \beta = (1, \ldots, k')$$

La valeur de ℓ varie de 1 à $n_1 n_2 \ldots n_k$ et celle de h de 1 à $m_1 m_2 \ldots m_{k'}$. Le tenseur mixte m est représenté par la matrice rectangle [M] à $n_1 . n_2 \ldots n_{k-1}\, n_k$ lignes et à $m_1 . m_2 \ldots m_{k'}$ colonnes.

Deux tenseurs quelconques m et m' sont représentés ainsi par les matrices [M] et [M'].

Il est alors intéressant de chercher par quelles opérations sur les matrices [M] et [M'] vont être représentées les contractions du tenseur m par le tenseur m' et de donner des règles pratiques de calcul. C'est le problème de la représentation matricielle des contractions des tenseurs, problème que nous allons aborder dans le présent travail.

Nous pouvons chercher de faire l'étude de façon compacte sans considérer les indices comme nous avons fait pour l'étude *compacte* de la représentation matricielle des bases et des tenseurs [4]. Toutefois, cette façon de procéder peut rendre difficile la compréhension des règles de calcul que nous allons énoncer en gardant toujours, il est bon de le souligner, la même optique précisée dans les références [2] [3] et [4].

Aussi, raisonnerons-nous à partir des composantes. Nous pouvons ainsi traiter ensemble la représentation matricielle des contractions des tenseurs affines sur un espace vectoriel, celle des contractions des tenseurs des produits tensoriels d'espaces vectoriels et celle des contractions des produits kroneckeriens et des puissances kroneckeriennes d'opérateurs linéaires.

Rappelons que nous gardons toujours la convention de sommation d'Einstein. Nous sommons sur les indices égaux en positions supérieure et inférieure. De même, faisons remarquer qu'elle met en évidence, ici aussi, les propriétés des covariance et de contrevariance des expressions obtenues, ce qui souligne son importance. Elle n'est donc pas uniquement une question de convention ou de notation comme on le croit souvent [6].

Dans la Section 2, nous étudions les contractions d'un tenseur covariant d'ordre q par un tenseur contravariant d'ordre $q-k$ $(k \leqslant q)$. Nous considérons les contractions à droite et à gauche ; nous énonçons les règles de calcul correspondantes. A l'aide d'exemples, nous montrons *l'inconsistance de la procédure habituellement utilisée.* Par exemple, dans cette dernière, on dispose les éléments $M_{\alpha\beta}$ en matrice dans laquelle α est considéré comme l'indice de ligne et β comme l'indice de colonne, détruisant ainsi le rôle symétrique joué par α et β. *Nous n'avons pas cette inconsistance.*

De même, il est bon de considérer les symétriques $[S]^t$ d'une matrice $[S]$ obtenus en permutant les indices dans les *mêmes* positions (*même* position inférieure, ou *même* position inférieure). Les symétriques d'une matrice sont différents du transposé de façon générale car la *transposition* dans une matrice consiste à *intervertir les lignes et les colonnes* c.à.d. des indices en positions supérieure *et* inférieure. Le symétrique et le transposé sont les mêmes dans le cas d'une matrice d'éléments M^{α}_{β} et son différents dans le cas d'une matrice-colonne d'éléments M^{α}_{β} ou d'une matrice-ligne d'éléments $M_{\alpha\beta}$.

L'introduction des symétriques d'une matrice ramène le calcul d'un contracté à gauche à celui d'un contracté à droite (et vice-versa). De même, nous énonçons les règles pratiques de formation des contractés, ce qui conduit à la définition du produit noté $\otimes$ d'une matrice-ligne de matrices-lignes par une matrice-colonne.

Dans la Section 3, nous abordons les contractions d'un tenseur contravariant p d'ordre q par un tenseur covariant d'ordre k $(k \leqslant q)$. Nous avons les contractions à gauche et à droite. Nous énonçons les règles de calcul de formation des contractés ; nous sommes amenés à définir le produit $\otimes$ d'une matrice-ligne par une matrice-colonne de matrices-colonnes.

Dans la Section 4, nous donnons la généralisation des sections 2 et 3 en étudiant la contraction partielle d'un tenseur mixte par un autre tenseur mixte. Les deux tenseurs mixtes sont représentés par des matrices dont nous indiquons la décomposition en matrices de matrices. La contraction partielle est représentée alors par le produit $\otimes$ de matrice de matrices par une autre matrice de matrices, produit dont nous donnons la loi de formation.

Le présent travail montre la possibilité d'étudier l'Algèbre tensorielle et le calcul tensoriel à l'aide des règles élémentaires du calcul matriciel habituel.

2. *CONTRACTION D'UN TENSEUR COVARIANT D'ORDRE* q *PAR UN TENSEUR CONTRAVARIANT D'ORDRE* $q-k$ $(k \leqslant q)$.

2.1. – Contraction à droite.

Considérons la contraction à droite du tenseur covariant ξ d'ordre q par le tenseur contravariant ξ' d'ordre $q-k$. Pour les composantes, nous avons :

(2.1.1) $\quad [C_D(\xi')\xi]_{j_1 j_2 \dots j_k} = X_{j_1 j_2 \dots j_k j_{k+1} \dots j_k} X'^{j_{k+1} \dots j_q}$

où $\quad j_\alpha = (1, \dots, m_\alpha) \quad$ pour $\alpha = (1, \dots, k)$

Les composantes $X'^{j_{k+1} j_{k+2} \dots j_q}$ de ξ' se disposent en la matrice-colonne $[\overline{X}']$ d'élément X'^i à la i-ème ligne, l'indice i étant donné par une relation analogue à (1.2) :

$$i = m_q m_{q-1} \dots m_k (j_{k+1} - 1) + \dots + m_q (j_{q-1} - 1) + j_q$$

L'indice i représente le groupement $\{j_{k+1}, j_{k+2}, \dots j_q\}$. $[\overline{X}']$ est une matrice-colonne à $m_q m_{q-1} \dots m_k = n_2$ lignes.

Les composantes $X_{j_1 j_2 \dots j_k \dots j_q}$ de ξ se disposent en la matrice-ligne $[\underline{L}]$ d'élément L_h à la h-ème colonne, l'indice h étant donné par la relation (1.2). L'indice h représente le groupement $\{j_1, j_2, \dots, j_q\}$. La matrice-ligne $[\underline{L}]$ a $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_q = m$ colonnes.

Le groupement $\alpha = \{j_1, j_2, \dots, j_k\}$ correspondant à l'indice α de ligne de la matrice $[\underline{L}'']$ représentant le contracté à droite de ξ par ξ' est égal à :

$$\alpha = m_k m_{k-1} \dots m_2 (j_1 - 1) + \dots + m_k (j_{k-1} - 1) + j_k$$

La matrice $[\underline{L}'']$ est une matrice-ligne à $m_k m_{k-1} \dots m_1 = n_1$ colonnes.

Nous allons décomposer la matrice-ligne $[\underline{L}]$ représentant le tenseur ξ en matrice-ligne de matrice-lignes (décomposition d'une matrice en blocs de matrices) de la façon suivante. Pour $\alpha = \{j_1, j_2, \dots, j_k\}$ fixé, les éléments de $[\underline{L}]$ peuvent être groupés en bloc de matrices-lignes $[L_{\underline{\alpha}}]$ dont la colonne i est déterminé par le groupement $j_k, j_{k+1}, \dots, j_q$ variable. Quand i varie (il y en a

$n_2 = m_k m_{k+1} \dots m_q$ valeurs) nous obtenons :

(2.1.2) $\quad [L_{\underline{\alpha}}] = [L_{\alpha; i}]$

qui est une matrice-ligne à n_2 colonnes.

Nous avons donc :

(2.1.3) $$[\underline{L}] = \Big[[\underline{L}_1][\underline{L}_2] \dots [\underline{L}_{n_1}]\Big]$$

(2.1.4) $$[\underline{L}''] = \Big[[\underline{L}_1]\cdot[\overline{X}'] \;\; [\underline{L}_2]\cdot[\overline{X}'] \dots [\underline{L}_{n_1}]\cdot[\overline{X}']\Big]$$

(2.1.5) $$= \Big[[\underline{L}_1] \; [\underline{L}_2] \dots [\underline{L}_{n_1}]\Big] \otimes_D [\overline{X}']$$

La relation (2.1.4) aéfinit le produit $\otimes_D$ de la matrice-ligne des matrices-lignes $\Big[[\underline{L}_1], [\underline{L_2}] \dots [\underline{L_{n_1}}]\Big]$ par la matrice-colonne $[\overline{X}']$.

Le terme L''_α de $[\underline{L}'']$ qui se trouve à la colonne paramétré par α est égal à $\underline{L_{\alpha;\,i}}\overline{X}'^i$, c.à.d. au produit $[\underline{L_\alpha}]\cdot[\overline{X}']$ de la matrice-ligne $[\underline{L_\alpha}]$ par la matrice-colonne $[X']$.

D'où :

Règle de calcul matriciel 1.

Nous décomposons la matrice-ligne $[\underline{L}]$ représentative du tenseur covariant d'ordre q en matrice-ligne

$$[\underline{L}] = \Big[[\underline{L}_1][\underline{L_2}] \dots [\underline{L_{n_1}}]\Big]$$

de matrices-lignes $[\underline{L}_\alpha]$ de colonne α déterminée par une valeur donnée du groupement $\{j_k, j_{k+1}, \dots j_q\}$.

Nous obtenons la matrice représentative du tenseur covariant contracté à l'aide du produit $\otimes_D$ donné par la relation (2.1.5) et définie par la règle (2.1.4).

Remarques

i) *Toutes les règles (calcul matriciel, disposition en lignes et en colonnes) que nous avons données sont respectées.* Le tenseur covariant contracté est représenté bien par une matrice-ligne. $[\underline{L}_\alpha]$ pour α fixé est une matrice-ligne à n_1 colonnes tandis que $[\overline{X}']$ est matrice-colonne à n_1 lignes. $[\underline{L_\alpha}]\cdot[\overline{X}']$ est un nombre.

ii) – Il est possible aussi à partir de (2.1.2) de disposer la matrice-ligne $[\underline{L}]$ de matrice-ligne $[\underline{L_\alpha}]$ en empilant ces dernières les unes sur les autres.

Cette façon de procéder revient à considérer l'indice de ligne α comme indice de ligne et l'indice de ligne $i = \{j_k, j_{k+1}, \dots, j_q\}$ comme indice de colonne. $[\underline{L}]$ est représenté ainsi par la matrice rectangle :

$$[L_{\alpha\,;\,i}] = \begin{bmatrix} \underline{L}_1 \\ \underline{L}_2 \\ \vdots \\ \underline{L}_{n_1} \end{bmatrix}$$

La matrice $[\overline{\Lambda}]$ représentative du tenseur contracté $C_D(\xi')\,\xi$ est donnée dans cette procédure par :

$$[\overline{\Lambda}] = \begin{bmatrix} \underline{L}_1 \cdot \overline{X}' \\ \underline{L}_2 \cdot \overline{X}' \\ \vdots \\ \underline{L}_{n_1} \cdot \overline{X}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{L}_1 \\ \underline{L}_2 \\ \vdots \\ \underline{L}_{n_1} \end{bmatrix} \otimes [\overline{X}'] .$$

où le produit $\otimes$ dans le troisième membre de l'égalité désigne le produit de matrice-ligne de matrice-lignes par la matrice-colonne $[\overline{X}']$.

Nous obtenons pour la matrice représentative d'un tenseur covariant la *matrice-colonne* $[\overline{\Lambda}]$ au lieu de la matrice-ligne $[\underline{L}'']$. Nous introduisons une inconsistance dans le formalisme, *inconsistance* qui est apparue quand nous avons considéré α comme indice de ligne et i comme indice de colonne dans l'expression (2.1.2) ; nous avons détruit ainsi le rôle symétrique joué par α et i .

iii) – Le produit $\otimes$ défini au (2.1.5) est différent du produit tensoriel de matrices. Le premier est la généralisation du second. En effet, le produit tensoriel $[\underline{L}] \otimes [\overline{X}']$ est égal à :

$$[L_{\alpha\,;\,i}] \otimes [\overline{X}'] = \left[L_{\alpha\,;\,i}\,[\overline{X}']\right]$$

qui est différent de (2.1.4) comme il est facile de le voir.

Exemple :

Donnons la contraction à droite du tenseur deux fois covariant g sur E par le tenseur une fois contravariant $\overline{x}$ de E .
($n = \dim E$).

$$\underline{y} = g(\ )(\overline{x})$$

Soient $(\overline{e}_i)$ une base de E, $g_{ij} = g(\overline{e}_i)(\overline{e}_j)$. Nous avons

$$\underline{x} = g(\overline{x})$$

soit en composantes

$$x_i = g_{ij}\, x^j$$

Le tenseur g sur la base $\overline{e}_i \otimes \overline{e}_j$ de $E^{*\otimes 2}$ est représenté par la matrice-ligne

$$[\underbrace{g_{11} \ldots g_{1n}}_{\underline{G}_1}, \underbrace{g_{21} \ldots g_{2n}}_{\underline{G}_2}, \ldots \underbrace{g_{n1} \ldots g_{nn}}_{\underline{G}_n}] = [\underline{G}_1 \quad \underline{G}_2 \ldots \underline{G}_n]$$

Le vecteur $\overline{x}$ de E est représenté par la matrice-colonne $\overline{X}$

$$[x_1\ x_2 \ldots x_n] = [\underline{G}_1\ \underline{G}_2 \ldots \underline{G}_n] \otimes \overline{X}$$

$$= [\underline{G}_1 . \overline{X} \quad \underline{G}_2 . \overline{X} \ldots \underline{G}_n . \overline{X}]$$

Souvent, on écrit cette relation sous la forme :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{G}_1 . \overline{X} \\ \underline{G}_2 . \overline{X} \\ \vdots \\ \underline{G}_n . \overline{X} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{G}_1 \\ \underline{G}_2 \\ \vdots \\ \underline{G}_n \end{bmatrix} \otimes \overline{X} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \ldots g_{1n} \\ g_{12} & g_{22} \ldots \vdots \\ \vdots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} \ldots g_{nn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}$$

Nous voyons que le covecteur $\underline{x}$ et le vecteur $\overline{x}$ sont représentés *tous les deux* par des matrices-colonnes! Nous renvoyons à la remarque *ii)*.

2.2. – Contraction à gauche.

La contraction à gauche du tenseur covariant ξ d'ordre q par le tenseur contravariant ξ' d'ordre k inférieur ou égal à q donne pour les composantes :

$$[C_G(\xi')\xi]_{j_{k+1} \ldots j_q} = \xi_{j_1 j_2 \ldots j_k \ldots j_q}\, \xi'^{\,j_1 j_2 \ldots j_k}$$

Le tenseur ξ' est représenté par la matrice-colonne $[\overline{X}']$

$$(2.2.1) \qquad [\overline{X}'] = \begin{bmatrix} X'^1 \\ X'^2 \\ \vdots \\ X'^{n1} \end{bmatrix}$$

où $\qquad n_1 = m_1 m_2 \dots m_k$

L'indice α de l'élément X'^{α} de $[\overline{X}']$ représente le groupement d'indices $\{j_1, j_2, \dots j_k\}$.

Nous décomposons la matrice $[\underline{L}]$ représentant le tenseur ξ en matrice-ligne de matrices-lignes $\left[[\underline{K}_i], [\underline{K}_2], \dots, [\underline{K}_{n_2}]\right]$ de telle sorte que la matrice-ligne $[\underline{K}_i]$ pour $i = (1, \dots, n_2 = m_{k+1} \dots m_q)$ ait n_2 colonnes.

$$(2.2.2) \qquad [\underline{L}] = [\underbrace{L_{11} \dots L_{1n_2}}_{[\underline{K}_1]} \quad \underbrace{L_{21} \dots L_{2n_2}}_{[\underline{K}_2]} \dots \underbrace{L_{n_1 1} \dots L_{n_1 n_2}}_{[K_{n_1}]}]$$

$$= \left[[\underline{K}_1] \quad [\underline{K}_2] \dots\dots [K_{n_1}]\right]$$

Le tenseur contracté $C_G(\xi')\xi$ est représenté par la matrice-ligne

$[C_1 \quad C_2 \dots C_i \dots C_{n_2}]$

Nous pouvons écrire la relation sous la forme

$$(2.2.4) \qquad [C_1 \quad C_2 \dots C_i \dots C_{n_2}] = \left[[\underline{K}_1]\,[\underline{K}_2] \dots [\underline{K}_i] \dots [\underline{K}_{n_1}]\right] \otimes_G [\overline{X}']$$

qui définit le produit $\otimes_G$ par la règle de calcul suivante.

Règle de calcul 2.

Le terme C_i est égal au i-ème terme de $[\underline{K}_1]$ multiplié par le premier terme X'^1 de $[\overline{X}']$, ajouté du i-ème terme de $[\underline{K}_2]$ multiplié par le deuxième terme X'^2 de $[\overline{X}']$, ajouté ...., ajouté du i-ème terme de $[K_\ell]$ multiplié par le terme X'^{ℓ} de $[\overline{X}']$, ajouté ...., ajouté du i-ème terme de $[\underline{K}_{n_1}]$ multiplié par le terme X'^{n1} de $[\overline{X}']$. Nous avons :

$$(2.2.5) \qquad C_i = K_{\alpha\,;\,i}\, X'^{\alpha}$$

$$\alpha = \{j_1 j_2, \dots j_k\} = (1\,; \dots; m_1 \times m_2 \times \dots \times m_k = n_1)$$

$$i = \{j_{k+1}, \dots j_q\} = (1\,; \dots; m_{k+1} \times \dots \times m_q = n_2)$$

Remarque :

Nous pouvons ramener la contraction à gauche à la contraction à droite en introduisant le *symétrique* ξ^t de ξ. Nous avons pour les éléments des matrices représentatives :

$$[\xi^t]_{\alpha ; i} = [\xi]_{i ; \alpha}$$

soit

$$K^t_{\alpha ; i} = K_{i ; \alpha}$$

Pour un tenseur covariant g d'ordre deux sur E, nous avons pour le symétrique g^t la définition :

$$g^t(\bar{x})(\bar{y}) = g(y)(\bar{x})$$

pour tous $\bar{x}$ et $\bar{y}$ de E, soit pour les éléments

$$g^t_{ij} = g_{ji}$$

Remarquons que le symétrique g^t est différent du transposé g^T. En effet, nous :

$$(g^t)_{ij} = g_{ji}$$

$$(g^T)_{ij} = g^{ij}$$

g^t est une matrice-ligne et g^T est une matrice-colonne. Mais, nous avons :

$$(G^t)^i_j = (G^T)^i_j = G^j_i$$

3. *CONTRACTION D'UN TENSEUR CONTRAVARIANT* p *D'ORDRE* q *PAR UN TENSEUR COVARIANT* t *D'ORDRE* k $(k \leqslant q)$.

3.1. – Contraction à gauche.

Considérons la contraction à gauche du tenseur contravariant p d'ordre q par le tenseur covariant d'ordre k.

Pour les composantes, elle donne :

$$\{C_G(t)p\}^{i_{k+1}\, i_{k+2} \cdots i_q} = p^{i_1\, i_2 \cdots i_k \cdots i_q}\, t_{i_1\, i_2 \cdots i_k} \qquad (3.1.1)$$

pour $i_j = (1, \ldots, n_\alpha)$

$j = (1, \ldots, q)$

A l'aide des relations (1.2) et (1.3), faisons la bijection

$$(3.1.2) \qquad \begin{cases} \alpha = \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \\ \beta = \{i_{k+1}, i_{k+2}, \dots, i_q\} \end{cases}$$

L'indice α varie de 1 à $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k = m_1$ tandis que l'indice β varie de $n_{k+1} \times n_{k+2} \times \dots \times n_q = m_2$.

Si C^β désigne la composante à la β-ième colonne de la matrice $[\overline{C}]$ représentant le premier membre de (3.1.1), cette relation s'écrit :

$$(3.1.3) \qquad C^\beta = p^{\alpha;\beta} t_\alpha$$

Le tenseur covariant t est représenté par la matrice-ligne

$$(3.1.4) \qquad [\underline{T}] = [t_\alpha] = [t_1 \ t_2 \dots t_{m_1}]$$

Le tenseur contravariant p est représenté par la matrice-colonne à $m_1 \times m_2$ lignes. Mais nous allons la décomposer en matrice-colonne de matrices-colonnes $[\overline{P}^\beta]$ de la façon suivante.

Pour une valeur β donnée, les éléments $p^{\alpha;\beta}$ pour α variant de 1 à m_1 forment la matrice-colonne $[\overline{P}^\beta]$ de telle sorte que le tenseur p est représenté par la matrice-colonne $[\overline{P}]$ de matrices-colonnes $[\overline{P}^\beta]$:

$$(3.1.5) \qquad [\overline{P}] = \begin{bmatrix} [\overline{P^1}] \\ [\overline{P^2}] \\ \vdots \\ [\overline{P^{m_2}}] \end{bmatrix}$$

où

$$(3.1.6) \qquad \overline{[P^\beta]} = \begin{bmatrix} p^{1;\beta} \\ p^{1;\beta} \\ \vdots \\ p^{m_1;\beta} \end{bmatrix}$$

pour β variant de 1 à m_2. Le terme $p^{\alpha;\beta}$ est défini au (3.1.3)

Règle de calcul 3.

Nous voyons alors à partir de la relation (3.1.1) que C^β se met sous la forme de produit matriciel de la matrice-ligne $[\underline{T}]$ par la matrice-colonne $[\overline{P}^\beta]$:

$$(3.1.7) \qquad C^{\beta} = [\underline{T}] \cdot [\overline{P}^{\beta}]$$

soit sous la forme :

$$(3.1.8) \qquad \begin{bmatrix} C^1 \\ C^2 \\ \vdots \\ C^{m_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\underline{T}] \cdot [\overline{P}^1] \\ [\underline{T}] \cdot [\overline{P}^2] \\ \\ [\underline{T}] \cdot [\overline{P}^{m_2}] \end{bmatrix}$$

soit encore :

$$(3.1.9) \qquad [\overline{C}] = [\underline{T}] \otimes_D \begin{bmatrix} \overline{P}^1 \\ \overline{P}^2 \\ \vdots \\ \overline{P}^{m_2} \end{bmatrix}$$

Le produit $\otimes_D$ de la matrice-ligne $[\underline{T}]$ par la matrice-colonne $[\overline{P}]$ de matrices-colonnes définie par (3.1.5) est donné par (3.1.9) avec la signification (3.1.8).

Remarque :

La règle de calcul (3.1.9) est l'extension de la règle définie au (2.1.5) et (2.1.4), c'est pourquoi nous avons gardé la même notation.

3.2. – Contraction à droite.

Considérons la contraction à droite du tenseur contravariant p d'ordre q par le tenseur s covariant d'ordre q–k ($k \leqslant p$). Pour les composantes, nous avons :

$$(3.2.1) \qquad [C_D(s)p]^{i_1 i_2 \cdots i_k} = p^{i_1 i_2 \cdots i_k \, i_{k+1} \cdots i_q} \, s_{i_{k+1} \, i_{k+2} \cdots i_q}$$

Avec les notations du paragraphe (3.1) et la décomposition (3.1.5) en matrice-colonne de matrices-colonnes de la matrice représentative de p, nous obtenons :

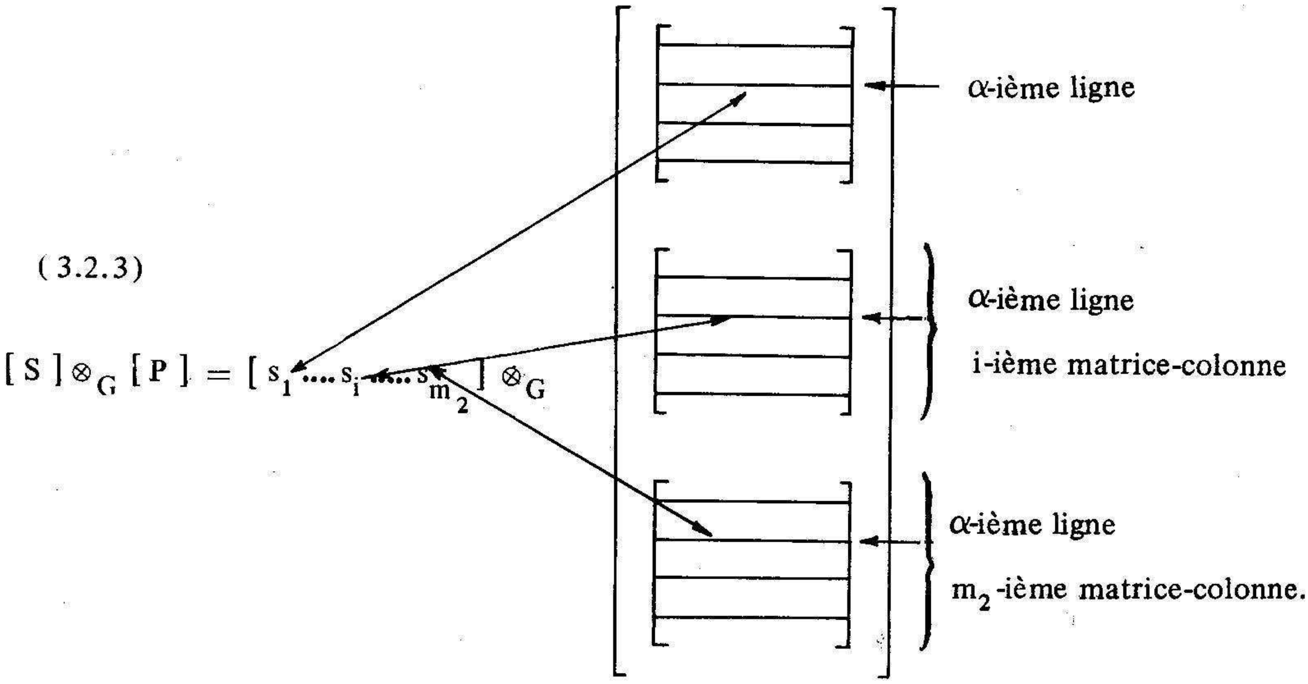
$$(3.2.2) \qquad C'^{\alpha} = p^{\alpha;\beta} \, s_{\beta}$$

$$[S] = [s_1 \quad s_2 \cdots s_{m_2}]$$

Règle de calcul 4.

L'élément C'^{α} est égal à $\sum^{m_2} p^{\alpha;\beta} s_{\beta}$ où $p^{\alpha;\beta}$ est l'élément à la α-ième ligne de la $\beta = 1$ matrice-colonne $[\overline{P}^{\beta}]$. Nous pouvons schématiser la règle de calcul par :

(3.2.3)



La relation (3.2.3) définit le produit $\otimes_G$.

Remarques :

i) – La règle de calcul (3.2.3) est l'extension de la règle définie au (2.2.4), c'est pourquoi nous avons gardé la même notation.

ii) – La contraction à droite du paragraphe 3.2 peut être ramenée à la contraction à gauche du paragraphe 3.1 (et vice-versa) en définissant le symétrique p^t de p à partir de la relation

$$p^{\alpha;\beta} = (p^t)^{\beta;\alpha}$$

iii) – Les opérateurs symétrique t et transposition t' pour les matrices sont différents de façon générale.
En effet, dans le cas actuel, nous avons :

$$(p^t)^{\beta;\alpha} = p^{\alpha;\beta} \qquad \text{par définition}$$

$$(p^{t'})^{\beta;\alpha} = p_{\beta;\alpha}$$

La première matrice est une matrice-colonne, tandis que la seconde, le transposé, est une matrice-ligne.

iv) Nous pouvons considérer dans l'expression de $p^{\alpha;\beta}$ définie au (3.1.3) et (3.2.2) l'indice α comme un indice de ligne et l'indice β comme un indice de colonne *comme on le fait souvent*. Le tenseur contravariant p d'ordre q est alors représenté par la matrice rectangle $[\,\Pi\,]$ à m_1

et à m_2 colonnes. Le contracté à gauche γ_G de p par t s'écrit en en composantes (relation 3.1.3) :

$$[\underline{\gamma_G}] = [\underline{T}] \cdot [\Pi]$$

Le contracté à droite γ_D de p par s s'écrit en composantes :

$$[\underline{\gamma_D}] = [\underline{S}] \cdot [\Pi]^{t'}$$

où $[\Pi]^{t'}$ est la matrice transposée de $[\Pi]$ (interversion des lignes et des colonnes).

Nous obtenons pour $[\underline{\gamma_G}]$ et $[\gamma_D]$ des matrices-lignes au lieu de matrices-colonnes pour un tenseur contravariant. Nous voyons que cette *façon de considérer introduit une inconsistance dans le formalisme de représentation matricielle, et détruit les propriétés de covariance et de contravariance.*

4. *GENERALISATION*

Soient

* le tenseur p représenté par la matrice $[P]$ dont l'élément $P^{\alpha_1\,;\,\alpha_2}_{\beta_1\,;\,\beta_2}$ se trouve à la ligne déterminée par le groupement $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ et à la colonne déterminée par le groupement $\{\beta_1, \beta_2\}$.

* le tenseur d représenté par la matrice $[D]$ dont l'élément $D^{\beta_2\,;\,\alpha_3}_{\beta_3\,;\,\alpha_1}$ se trouve se trouve à la ligne déterminée par le groupement β_2, α_3 et à la colonne déterminée par le groupement $\beta_3 ; \alpha_1$ .Soulignons que les $\alpha_1, \alpha_2, \ldots. \beta_1, \beta_2, \ldots$ représentent déjà des groupements d'indices.

Le contracté mixte (gauche – droite) c de p par d est représenté par la matrice $[C]$ dont l'élément $C^{\alpha_2\,;\,\alpha_3}_{\beta_1\,;\,\beta_3}$ se trouvant à la ligne déterminée par le groupement $\{\alpha_2, \alpha_3\}$ et à la colonne déterminée par le groupement $\{\beta_1, \beta_3\}$ est égal à :

$$C^{\alpha_2\,;\,\alpha_3}_{\beta_1\,;\,\beta_3} = P^{\alpha_1\,;\,\alpha_2}_{\beta_1\,;\,\beta_2} \cdot D^{\beta_2\,;\,\alpha_3}_{\beta_3\,;\,\alpha_1} \qquad (4.1)$$

Nous allons donner la représentation matricielle de (4.1). Pour ce faire, nous décomposons la matrice $[P]$ en blocs de matrices $[\Pi^{\alpha_2}_{\beta_1}]$ qui correspondent à des valeurs fixées de α_3 et de β_1 , et à des valeurs de α_1 et β_2 parcourant leur domaine de définition.

De même, nous décomposons la matrice $[D]$ en blocs de matrices $[\Delta^{\alpha_3}_{\beta_3}]$ qui correspondent à des valeurs fixées de α_3 et de β_3, α_1 et β_2 parcourant leur domaine de définition.

Nous avons alors :

$$(4.2) \qquad C^{\alpha_2\,;\,\alpha_3}_{\beta_1\,;\,\beta_3} = \mathrm{Tr}\{\,[\Pi^{\alpha_2}_{\beta_1}]\,.\,[\Delta^{\alpha_3}_{\beta_3}]\}$$

où Tr désigne la trace.

Règle générale 5.

Nous pouvons alors définir le produit $\otimes$ de la matrice $[P]$ décomposée en blocs de matrices $[\Pi^{\alpha_2}_{\beta_1}]$ par la matrice $[D]$ décomposée en blocs de matrices $[\Delta^{\alpha_3}_{\beta_3}]$ par :

$$(4.3) \qquad [P] \otimes [D] = \begin{bmatrix} & \vdots & \\ \cdots & [\Pi^{\alpha_2}_{\beta_1}] & \cdots \\ & \vdots & \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} & \vdots & \\ \cdots & [\Delta^{\alpha_3}_{\beta_3}] & \cdots \\ & & \end{bmatrix}$$

$$= \begin{array}{c} \left[\ \mathrm{Tr}\,\{[\Pi^{\alpha_2}_{\beta_1}]\,.\,[\Delta^{\alpha_3}_{\beta_3}]\}\ \right] \longleftarrow (\alpha_2, \alpha_3)\text{-ème ligne} \\ \uparrow \\ (\beta_1, \beta_3)\text{-ème colonne} \end{array}$$

La contraction partielle mixte est représentée par le produit $\otimes$ de matrices de matrices.

Remarque :

Nous pouvons toujours ramener la contraction au cas de la formule (4.1) en utilisant au besoin le «symétrique haut» p^t et le «symétrique bas» p_t de p. Dans le cas actuel, nous avons deux symétriques qui sont définis par :

$$(p^t)^{\alpha_1\,;\,\alpha_2}_{\beta_1\,;\,\beta_2} = p^{\alpha_2\,;\,\alpha_1}_{\beta_1\,;\,\beta_2}$$

$$(p_t)^{\alpha_1\ \alpha_2}_{\beta_1\ \beta_2} = p^{\alpha_1\ \alpha_2}_{\beta_2\ \beta_1}$$

Soulignons que les symétriques de matrices ici sont différents de la transposition d'une matrice qui consiste à échanger les lignes et les colonnes. Le symétrique consiste en une permutation des éléments d'une *même* ligne (ou d'une *même* colonne) de matrices.

5. *CONCLUSION*

Les tenseurs étant représentés par des matrices, nous avons montré que les contractions des tenseurs, dont nous avons donné l'étude intrinsèque dans la première partie, correspondent à introduire les produits droit $\otimes_D$ et gauche $\otimes_G$ pour les matrices de matrices. Nous obtenons ainsi la représentation matricielle des tenseurs contractés.

L'étude conduit donc à considérer les matrices de matrices et à énoncer des règles de calcul pour elles. Ces règles qui correspondent aux contractions des tenseurs *respectent automatiquement les dispositions en ligne-colonne* que nous avons par ailleurs définies. *Elles n'introduisent aucune inconsistance dans le formalisme, et soulignent les propriétés de covariance et de contravariance,* ce qui n'est guère le cas quand on représente par exemple le tableau des éléments $M_{\alpha\beta}$ sous forme de matrice où α est un indice de ligne et β un indice de colonne.

Nous voyons aussi l'importance de la convention d'Einstein ; celle-ci n'est pas uniquement une question de notation ou de convention comme on le pense souvent [6] ; elle est essentielle car elle met en évidence les propriétés de covariance et de contravariance des quantités considérées.

*

*   *

BIBLIOGRAPHIE

[1] RAOELINA ANDRIAMBOLOLONA.I.- Etude intrinsèque de la contraction des tenseurs. Ann. de l'Univ. de Madagascar, Série Sc. Nat. et Math., N° *14* (1977), pp. 31-42.

[2] RAOELINA ANDRIAMBOLOLONA – RAMIARAMANANA D. I. De la définition intrinsèque des tenseurs et de son utilisation pratique en calcul tensoriel. Changement de bases. Ann. Univ. de Madagascar, Série Sc. Nature et Math., N° *11* (1974), pp. 19-43.

[3] RAOELINA ANDRIAMBOLOLONA – RAMIARAMANANA. II. De la définition intrinsèque des tenseurs et de son utilisation pratique en calcul tensoriel. Changement de bases, Ann. Univ. de Madagascar, Série Sc. Nature et Math. N° *12* (1975), pp. 1-27.

[4] RAOELINA ANDRIAMBOLOLONA. – Représentation matricielle des bases et des tenseurs. Etude compacte. Ann. Univ. de Madagascar, Série Sc. Nature et Math. N° *14* (1977), pp.1-13.

[5] RAOELINA ANDRIAMBOLOLONA. – Etude intrinsèque et représentation matricielle des produits kroneckeriens et des puissances kroneckeriennes d'opérateurs linéaires. Etude générale. Ann. Univ. Madagascar, Série Sc. Nature et Math. N° *14* (1977), pp. 15-29.

[6] CHAMBADAL L. et OVAERT J-L. – Algèbre linéaire et algèbre tensorielle Ed. Dunod (1968), page 185.