Sciences de la Nature et Mathématiques, N° 14, 1977.

I. ETUDE INTRINSEQUE DE LA CONTRACTION DES TENSEURS

par RAOELINA ANDRIAMBOLOLONA

Laboratoire de Physique
Faculté des Sciences – B.P. 138
Université de Madagascar
Antananarivo – Madagascar.

RESUME

Après avoir rappelé la définition intrinsèque des tenseurs affines sur E (ces derniers étant définis comme étant les formes multilinéaires sur E et sur l'espace dual E*), nous donnons une étude intrinsèque de la contraction d'un tenseur par un autre tenseur. Nous étudions la contraction d'un tenseur contravariant d'ordre p par un covecteur (tenseur covariant d'ordre un). Puis nous généralisons l'étude à la contraction d'un tenseur contravariant d'ordre q par un tenseur covariant d'ordre $p (p \leqslant q)$.

Nous donnons la deuxième étape de généralisation. Ensuite, nous concluons par l'étude de la contraction par un tenseur d'ordre un et par un tenseur d'ordre deux, ce qui nous amène à l'étude de la représentation matricielle de la contraction, objet de la Partie II.

ABSTRACT

After having recalled the intrinsic definition of tensors on a vectorial space E *(the latter are defined as multilinear forms on* E *and on the dual space* E**), an intrinsic study of tensor contraction is given. (contraction of a countervariant tensor by a covector, contraction of a q-order countervariant tensor by p-order covariant tensor ($p \leqslant q$).*

After having given the generalization of the study, we conclude by studying the contraction by a first order and second order tensors. We are then led to look for the contraction matricial representation which will be tackled in the Part II.

1. *INTRODUCTION*

Nous allons étudier de façon intrinsèque la contraction des tenseurs dans cette première partie.

La définition des tenseurs et les notations que nous utilisons sont celles qui ont été données dans les précédents travaux [1] [2], savoir que les tenseurs sont les formes multilinéaires sur un espace vectoriel E de dimension *finie* n. Il existe une deuxième définition à partir des produits tensoriels de vecteurs et// ou de covecteurs. Il est possible de montrer que dans le cas de *dimension finie,* il existe une bijection entre les tenseurs définis connus formes multilinéaires et les tenseurs définis à partir des produits tensoriels de vecteurs et / ou de covecteurs. Pour les espaces vectoriels de dimension finie, il est donc possible de faire l'identification des tenseurs dans les deux cas.

Dans tout notre travail, nous utiliserons la convention d'Einstein : nous sommons sur les indices répétés en positions inférieure et supérieure. Rappelons que nous avons montré dans le travail [2] que le convention d'Einstein n'est pas *uniquement* une convention d'écriture ; elle est essentielle car elle permet de distinguer facilement les propriétés de covariance et de contravariance des tenseurs.

Nous allons rappeler un résultat qui sera utile dans la suite.

Si le système ($\bar{e}_i$) pour i = (1,...., n) forme une base de l'espace vectoriel E sur le corps K et de dimension n et si ($\underline{\epsilon}^j$) pour j = (1,....,n) est la base duale, donc un système de générateurs libre de l'espace dual E*, il est facile de montrer que le système formé par les produits tensoriels ($\underline{\epsilon}^{i_1} \otimes \underline{\epsilon}^{i_2} \otimes .... \otimes \underline{\epsilon}^{i_p}$) forme une base de $E^{*\otimes p}$. Un tenseur contravariant t d'ordre p sur E, c.à.d. un élément de l'espace vectoriel $E^{\otimes p}$, se décompose sur la base induite par la base ($\bar{e}_i$) de E en :

$$t = t^{i_1 i_2 .... i_p} \, \bar{e}_{i_1} \otimes .... \otimes \bar{e}_{i_p}$$

La composante $t^{i_1 i_2 .... i_p}$ est égale à :

$$(1.1) \qquad t^{i_1 i_2 .... i_p} = t(\underline{\epsilon}^{i_1})(\underline{\epsilon}^{i_2}) .... (\underline{\epsilon}^{i_p})$$

Cette relation est importante car elle permet d'obtenir de façon simple la loi de transformation des composantes d'un tenseur dans un changement de bases (c.f. par exemple référence [2] . Elle nous sera utile aussi pour la suite.

Nous avons des relations analogues à la relation (1.1) pour les tenseurs contravariants et mixtes mutatis mutandis.

Dans la deuxième Partie, nous donnerons la représentation matricielle de la contraction, représentation qui utilise la représentation matricielle des tenseurs dans une base [3].

2. *CONTRACTION À GAUCHE*

Soient ξ un tenseur contravariant d'ordre p de $E^{*\otimes p}$, et $\underline{\phi}$ un covecteur de E^*.

2.1. — Définition. Contraction à gauche pour un élément de E^*

Nous appelons contraction à gauche ξ par $\underline{\phi}$ de E^* l'opérateur $C(\underline{\phi})$ de tel que :

$$\begin{cases} \{C(\underline{\phi})\ \xi\}\ (\underline{\phi}_1)(\underline{\phi}_2)\ldots(\underline{\phi}_{p-1}) = \xi(\underline{\phi})(\underline{\phi}_1)(\underline{\phi}_2)\ldots(\underline{\phi}_{p-1}) \\ C(\underline{\phi})\alpha = 0 \quad \text{pour tout } \alpha \text{ de K.} \end{cases}$$

2.2. — Propriétés. Composantes.

a) La place de $\underline{\phi}$ de E^* utilisé pour la contraction doit être précisée.

b) $C(\underline{\phi})\xi$ est un élément de $E^{\otimes(p-1)}$.

c) $C(\underline{\phi})$ est un opérateur linéaire appliquant $E^{\otimes p}$ sur $E^{\otimes(p-1)}$.

En effet, il est facile de montrer que :

$$C(\underline{\phi})(\lambda\xi + \lambda'\xi') = \lambda\ C(\underline{\phi})\xi + \lambda'\ C(\underline{\phi})\xi'$$

pour tous ξ et ξ' de $E^{\otimes p}$ et tous λ et λ' de K.

d) Composantes du tenseur contracté $C(\underline{\phi})\xi$:

Soient $(\vec{e}_i)$ une base de E et $(\underline{\epsilon}^j)$ la base duale.

$$\underline{\phi} = \underline{\phi}_j\ \underline{\epsilon}^j \tag{2.2.1}$$

Les composantes de $C(\underline{\phi})\xi$ de $E^{\otimes p}$ sont données par :

$$\{C(\underline{\phi})\xi\}^{i_1 i_2 \ldots i_{p-1}} = \{C(\underline{\phi})\xi\}\ (\underline{\epsilon}^{i_1})(\underline{\epsilon}^{i_2})\ldots(\underline{\epsilon}^{i_{p-1}})$$

à cause de la relation (1.1)

$$= \xi(\underline{\phi})(\underline{\epsilon}^{i_1})(\underline{\epsilon}^{i_2})\ldots(\underline{\epsilon}^{i_{p-1}})$$

par définition (2.1.1) de la contraction

$$= \xi(\underline{\phi}_j\underline{\epsilon}^j)(\underline{\epsilon}^{i_1})(\underline{\epsilon}^{i_2})\ldots(\underline{\epsilon}^{i_{p-1}})$$

en utilisant la décomposition (2.2.1) de $\underline{\phi}$.

$$= \underline{\phi}_j\ \xi(\underline{\epsilon}^j)(\underline{\epsilon}^{i_1})(\underline{\epsilon}^{i_2})\ldots(\underline{\epsilon}^{i_{p-1}})$$

en utilisant la linéarité

$$= \phi_j \, \xi^{j i_1 i_2 \dots i_{p-1}}$$

en utilisant la relation (1.1)

La contraction par ϕ de ξ consiste donc à multiplier la composante $\xi^{j i_1 i_2 \dots i_{p-1}}$ de ξ par la composante ϕ_j de ϕ et à sommer sur j allant de 1 à n.

Remarquons que l'indice j pour ξ est en position haute et l'indice j pour ϕ est en position basse.

3. *GENERALISATION*

Contraction à gauche d'un tenseur contravariant ξ de $E^{\otimes q}$ par un tenseur covariant ξ' de $E^{*\otimes p}$ pour $p \leqslant q$.

Nous définissons la contraction $C(\xi')$ par ξ' de ξ par :

$$(3.1) \quad \begin{cases} \{C(\xi')\xi\}(\phi_1)(\phi_2)\dots(\phi_{q-p}) = \xi(\xi')(\phi_1)(\phi_2)\dots(\phi_{q-p}) \\ C(\xi')\xi = 0 \qquad \text{si le degré de } \xi' \text{ est plus grand que le degré de } \xi. \\ \text{pour tous covecteurs } \phi_i \text{ de } E^*, \ i \text{ variant de } 1 \text{ à } q-p. \end{cases}$$

Précisons la signification du second membre de la relation (3.1). Si nous avons :

$$(3.2) \qquad \xi' = a^{1\,2\dots p} \, \psi_1 \otimes \psi_2 \otimes \dots \otimes \psi_p$$

où ψ_i pour i allant de 1 à p sont des covecteurs de E^*. La signification du second membre est la suivante :

$$(3.3) \quad \xi(\xi')(\phi_1)(\phi_2)\dots(\phi_{q-p}) = a^{1\,2\dots p} \, \xi(\psi_1)(\psi_2)\dots(\psi_p)(\phi_1)(\phi_2)\dots(\phi_{q-p})$$

Il est facile de montrer que $C(\xi')$ est un opérateur linéaire appliquant $E^{\otimes p}$ dans $E^{\otimes(q-p)}$

Cherchons maintenant les composantes de $C(\xi')\xi$ dans la base de $E^{\otimes(q-p)}$ qui est induite par une base $(\bar{e}_i)$ de E, de base duale $(\underline{\epsilon}^j)$.

$$\{C(\xi')\xi\}^{i_1 i_2 \dots i_{q-p}} = C(\xi')\xi \cdot (\underline{\epsilon}^{i_1})(\underline{\epsilon}^{i_2})\dots(\underline{\epsilon}^{i_{q-p}})$$

à cause de la relation (1.1)

$$= \xi(\xi')(\underline{\epsilon}^{i_1})(\underline{\epsilon}^{i_2})\dots(\underline{\epsilon}^{i_{q-p}})$$

par définition (3.1) de la contraction

Or ξ' se décompose sur la base de $E^{*\otimes p}$ en :

$$\xi' = \xi'_{k_1 k_2 \dots k_p} \, \underline{\epsilon}^{k_1} \otimes \underline{\epsilon}^{k_2} \otimes \dots \otimes \underline{\epsilon}^{k_p}$$

d'où :

$$\{C(\xi')\,\xi\}^{i_1 i_2 \dots i_{q-p}} = \xi'_{k_1 k_2 \dots k_p} \, \xi(\underline{\epsilon}^{k_1})(\underline{\epsilon}^{k_2})\dots(\underline{\epsilon}^{k_p})(\underline{\epsilon}^{i_1})(\underline{\epsilon}^{i_2})\dots(\underline{\epsilon}^{i_{q-p}})$$

$$= \xi'_{k_1 k_2 \dots k_p} \, \xi^{k_1 k_2 \dots k_p \, i_1 i_2 \dots i_{q-p}}$$

à cause des relations (3.2), (3.3) et (1.1).

Nous prenons les *mêmes* indices $k_1 k_2 \dots k_p$ pour ξ' et les p premiers indices des composantes de ξ. Nous sommons sur ces indices qui sont en positions inférieure et supérieure.

Nous retrouvons les résultats habituels quend la contraction est définie à partir des composantes (donc de façon non intrinsèque).

4. *REMARQUES ET CONCLUSION*

Nous avons étudié la contraction à gauche d'un tenseur contravariant sur E par un tenseur covariant sur E. Mais nous voyons que nous pouvons étendre la définition pour les tenseurs quelconques, covariants, contravariants ou mixtes sur E (tenseurs affines sur E). Il faut toutefois faire attention dans l'écriture de la définition car la place de la contraction doit être bien entendu précisée. La seconde étape de généralisation à des tenseurs définis à partir des produits tensoriels d'espaces vectoriels quelconques ne présente pas non plus de difficulté.

Rappelons la définition du produit tensoriel d'espaces vectoriels quelconques. Soient k espaces vectoriels E_i sur le corps K, $\bar{x}_i$ un vecteur quelconque de E_i, ϕ_i un covecteur de l'espace dual E_i^*. L'ensemble des t tel que le nombre $t(\phi_1)(\phi_2)\dots(\phi_k)$ soit linéaire par rapport à chaque ϕ_i et qui est muni de deux lois de composition (la somme t + t', et le produit αt pour tout α de K) a une structure d'espace vectoriel qui est appelé le produit tensoriel des E_i et noté

$$\otimes E_i = E_1 \otimes E_2 \otimes \dots \otimes E_k$$

En particulier, nous avons

(4.0.1) $\{\bar{x}_1 \otimes \bar{x}_2 \otimes \dots \otimes \bar{x}_k\}(\phi_1)(\phi_2)\dots(\phi_k) = \underbrace{\phi_1(\bar{x}_1)} \cdot \underbrace{\phi_2(\bar{x}_2)} \dots \underbrace{\phi_k(\bar{x}_k)}$

La définition de la contraction donnée au (3.1) avec la signification (3.3) montre alors que le contracté

(4.0.2) $\{C(\bar{x}_1 \otimes \bar{x}_2 \otimes \dots \otimes \bar{x}_k)\} \; \phi_1 \otimes \phi_2 \otimes \dots \otimes \phi_k$

du tenseur $\phi_1 \otimes \phi_2 \otimes .... \phi_k$ de $\otimes E_i^*$ par le tenseur $\bar{x}_1 \otimes \bar{x}_2 \otimes .... \otimes \bar{x}_k$ de $\otimes E_i$ est un tenseur d'ordre 0 donc un élément de K et est égal au premier membre de la relation (4.0.1).

De façon plus générale, la première relation de la définition (3.1) permet d'écrire le contracté $C(\xi')\,\xi$ sous la forme

$$(4.0.3) \qquad \{C(\xi')\}\xi = \xi(\xi')$$

en donnant au second membre de (4.0.3) la signification donnée au (3.2) et (3.3). La relation (4.0.2) se généralise en :

$$(4.0.4) \quad \{C(\bar{x}_1 \otimes \bar{x}_2 \otimes .... \otimes \bar{x}_p)\}\, \phi_1 \otimes \phi_2 \otimes .... \otimes \phi_p \otimes \phi_{p+1} \otimes .... \otimes \phi_q =$$

$$\{\phi_1(\bar{x}_1) \cdot \phi_2(\bar{x}_2) ..... \phi_p(\bar{x}_p) \cdot\}\,(\phi_{p+1} \otimes \phi_{p+2} \otimes .... \otimes \phi_q)$$

Insistons sur le fait que nous avons plusieurs définitions de la contraction suivant la place des contractions.

Considérons maintenant quelques cas particuliers intéressants.

4.1. – Contraction par un tenseur d'ordre un.

Soient un vecteur $\bar{x}$ de E, un covecteur ϕ de E^*, t un tenseur au moins une fois covariant sur E, v un tenseur au moins une fois contravariant sur E. Nous avons les résultats suivants :

$$\{C(\phi)\}\,\bar{x} = \{C'(\bar{x})\}\,\phi = \phi(\bar{x})$$

$$\{C_1(\bar{x})\}\,t = t(\bar{x})$$

$$\{C_i(\bar{x})\}\,t = t(\ )\,....\underbrace{(\bar{x})}_{\text{i-ème place}}....$$

$$\{C_1(\phi)\}\,v = v(\phi)(\ )\,....$$

$$\{C_i(\phi)\}\,\bar{v} = v(\ )\,....\underbrace{(\phi)}_{\text{i-ème place}}....$$

Nous avons pour les contractés de t et v par $\bar{x}$ et ϕ plusieurs définitions suivant les places de $\bar{x}$ et de ϕ dans le deuxième membre.

4.2. – Contraction par un tenseur deux fois covariant.

Soient g un tenseur deux fois covariant sur E donc élément de $E^{*\otimes 2}$, $\bar{x}$ et $\bar{y}$ des vecteurs de E (des contravecteurs d'ordre un sur E), ξ un tenseur contravariant d'ordre r sur E donc élément de $E^{\otimes r}$, $(\bar{e}_i)$ une base de E, (ϵ^j) la base duale, $g = g_{ij}\epsilon^i \otimes \epsilon^j$ la décomposition de g sur la base $(\epsilon^i \otimes \epsilon^j)$ de $E^{*\otimes 2}$.

Nous avons les relations suivantes :

$$\{C_1(g)\}\ \bar{x} = g(\bar{x}) = \underline{x}_1$$

$$\{C_2(g)\}\ \bar{x} = g(\ )(\bar{x}) = \underline{x}_2$$

La décomposition sur les bases donne :

$$\underline{x}_1 = g_{ij}\, \underline{\epsilon}^i \otimes \underline{\epsilon}^j(\bar{x}) = g_{ij}\ x^i\, \underline{\epsilon}^j$$

$$\underline{x}_2 = g_{ij}\, \underline{\epsilon}^i \otimes \underline{\epsilon}^j(\ )(\bar{x}) = g_{ij}\ x^j\, \underline{\epsilon}^i$$

Dans le cas où g est symétrique ($g_{ij} = g_{ji}$ pour tous i et j) et pour des tenseurs affines et uniquement dans ces cas, les covecteurs $\underline{x}_1$ et $\underline{x}_2$ sont égaux. Mais dans le cas général, *même si* nous avons pour les composantes la relation $g_{ij} = g_{ji}$ pour tous i et j, *les covecteurs* $\underline{x}_1$ et $\underline{x}_2$ sont différents car ils appartiennent à des espaces vectoriels *différents.* $C_1(g)\bar{x}$ et $C_2(g)(\bar{x})$ appartiennent à $\mathcal{L}(E,K)$. Les opérateurs $C_1(g)$ et $C_2(g)$ appartiennent à $\mathcal{L}(E,E^*)$. g appartient à $E^{*\otimes 2}$

$$\{C_1(g)\}\ \bar{x} \otimes \bar{y} = g(\bar{x})(\bar{y}) = \underline{x}_1(\bar{y})$$

$$\{C_2(g)\}\ \bar{x} \otimes \bar{y} = g(\bar{y})(\bar{x}) = g^t(\bar{x})(\bar{y})$$

(g^t désigne l'opérateur symétrique de l'opérateur g linéaire de E dans E* associé de façon bijective au tenseur deux fois covariant g).

L'égalité $g_{ji} = g_{ji}$ quels que soient i et j pour les composantes de g entraîne l'égalité suivante pour les éléments de K :

$$\{C_1(g)\}\ \bar{x} \otimes \bar{y} = C_2(g)\ \ \bar{x} \otimes \bar{y} = g(\bar{x})(\bar{y}) = g(\bar{y})(\bar{x})$$

$$\{C_1(g)\}\ \xi = \xi(g)$$

Nous obtenons pour les composantes les relations

$$\{C_1(g)\}\ \xi = \{C_1(g_{ik}\, \underline{\epsilon}^i \otimes \underline{\epsilon}^k)\}\ \xi^{j_1 j_2 \dots j_r}\ \bar{e}_{j_1} \otimes \bar{e}_{j_2} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{j_r}$$

$$= g_{ik}\ \xi^{j_1 j_2 \dots j_r}\ \underline{\epsilon}^i(\bar{e}_{j_1}) \,.\, \underline{\epsilon}^k(\bar{e}_{j_2})\ \bar{e}_{j_3} \otimes \bar{e}_{j_4} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{j_r}$$

$$= g_{ik}\ \xi^{ik\ j_3 j_4 \dots j_r}\ \bar{e}_{j_3} \otimes \bar{e}_{j_4} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{j_r}$$

par définition de la base duale et d'après la relation (4.0.4,

Faisons intervenir le tenseur mixte ξ' d'ordre r, (r−1) contravariant et une fois covariant :

$$\xi' = g_{ik}\ \xi^{ij_2 j_3 \dots j_r}\ \underline{\epsilon}^k \otimes \bar{e}_{j_2} \otimes \bar{e}_{j_3} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{j_r}$$

de composantes $\xi'^{\,j_2 j_3 \dots j_r}$ sur la base $(\epsilon^k \otimes \bar{e}_{j_2} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{j_r})$ de $E^* \otimes E^{\otimes (r-1)}$. Nous avons fait *descendre* l'indice supérieur j_1 en position inférieure k. Puis pour obtenir les composantes de $\{C_1(g)\}\xi$ nous posons dans les composantes de ξ' la relation $j_2 = k$ et nous sommons sur k de 1 à n. Nous obtenons bien un tenseur covariant d'ordre $r - 2$.

4.3. — Contraction par un tenseur deux fois contravariant.

Soient t un tenseur deux fois contravariant sur E donc élément de $E^{\otimes 2}$, ϕ et ψ des covecteurs de E^* (des tenseurs covariants d'ordre un), ω un tenseur covariant d'ordre s sur E donc élément de $E^{*\otimes s}$, $\bar{e}_i$ une base de E, (ϵ^j) la base duale, $t = t^{ij}\,\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j$ la décomposition de t sur la base $\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j$ de $E^{\otimes 2}$.

Nous avons les relations :

$$\{C_1(t)\}\,\phi = t(\phi) = \bar{\phi}_1$$

$$\{C_2(t)\}\,\phi = t(\ )(\phi) = \bar{\phi}_2$$

$$\bar{\phi}_1 = t^{ij}\,\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j(\phi) = t^{ij}\,\phi_i\,\bar{e}_j$$

$$\bar{\phi}_2 = t^{ij}\,\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j(\ )(\phi) = t^{ij}\,\phi_j\,\bar{e}_i$$

De façon générale, $\bar{\phi}_1$ et $\bar{\phi}_2$ sont différents même si $t^{ij} = t^{ji}$ pour tous i et j car ils appartiennent à des espaces vectoriels différents. Pour les tenseurs affines, et si g est symétrique, alors $\bar{\phi}_1 = \bar{\phi}_2$.

$\{C_1(t)\}\,\phi$ et $\{C_2(t)\}\,\phi$ appartiennent à $\mathcal{L}(E^*,K)$. Les opérateurs $\{C_1(t)\}$ et $\{C_2(t)\}$ appartiennent à $\mathcal{L}(E^*,E)$. t appartient à $E^{\otimes 2}$

$$\{C_1(t)\}\,\phi \otimes \psi = t(\phi)(\psi)$$

$$\{C_2(t)\}\,\phi \otimes \psi = t(\psi)(\phi)$$

Si t est symétrique, nous n'avons pas besoin de préciser la place de la contraction car :

$$\{C_1(t)\}\,\phi \otimes \psi = \{C_2(t)\}\,\psi \otimes \phi = t(\phi)(\psi) = t(\psi)(\phi)$$

De même, nous avons :

$$\{C_1(t)\}\,\omega = \omega(t)$$

Pour les composantes, nous obtenons les relations

$$\{C_1(t)\}\,\omega = \{C_1(t^{ik}\,\bar{e}_i \otimes \bar{e}_k)\}\;\omega_{j_1 j_2 \ldots j_s}\,\underline{\epsilon}^{j_1} \otimes \underline{\epsilon}^{j_2} \otimes \ldots \otimes \underline{\epsilon}^{j_s}$$

$$= t^{ik}\;\omega_{ik\, j_3 j_4 \ldots j_s}\,\underline{\epsilon}^{j_3} \otimes \underline{\epsilon}^{j_4} \otimes \ldots \otimes \underline{\epsilon}^{j_s}$$

par définition de la base duale et d'après la relation (4.0.4).

Introduisons le tenseur mixte ω' d'ordre s, (s–1) fois covariant et une fois contravariant

$$\omega' = t^{ik}\;\omega_{i\, j_2 j_3 \ldots j_s}\;\bar{e}_k \otimes \underline{\epsilon}^{j_2} \otimes \underline{\epsilon}^{j_3} \otimes \ldots \otimes \underline{\epsilon}^{j_s}$$

de composantes $\omega^k{}_{j_2 j_3 \ldots j_s}$ dans la base $\bar{e}_k \otimes \underline{\epsilon}^{j_2} \otimes \ldots \otimes \underline{\epsilon}^{j_s}$ de $E \otimes E^{*\otimes(s-1)}$.

Nous avons fait *montrer* l'indice inférieur j_1 en indice supérieur k. Puis nous obtenons les composantes de $\{C_1(t)\}\,\omega$ en posant l'indice inférieur j_2 égal à k et en sommant sur k de 1 à n. Nous obtenons un tenseur contravariant d'ordre s–2.

4.4. – Contraction par un tenseur mixte d'ordre deux, une fois covariant, une fois contravariant.

Soient m un tenseur mixte d'ordre deux, donc élément de $E^* \otimes E$, $\bar{x}$ un vecteur de E, $\underline{\phi}$ un covecteur de E^*, v un tenseur mixte d'ordre s + r, s fois covariant, r fois contravariant, élément de $E^{*\otimes s} \otimes E^{\otimes r}$, et se décomposant en :

$$v = v^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{j_1 j_2 \ldots j_s}\;\underline{\epsilon}^{j_1} \otimes \underline{\epsilon}^{j_2} \otimes \ldots \otimes \underline{\epsilon}^{j_s} \otimes \bar{e}_{i_1} \otimes \bar{e}_{i_2} \otimes \ldots \otimes \bar{e}_{i_r}$$

sur la base $\underline{\epsilon}^{j_1} \otimes \underline{\epsilon}^{j_2} \otimes \ldots \otimes \underline{\epsilon}^{j_s} \otimes \bar{e}_{i_1} \otimes \bar{e}_{i_2} \otimes \ldots \otimes \bar{e}_{i_r}$ de $E^{*\otimes s} \otimes E^{\otimes r}$.

$$m = m^i_k\;\underline{\epsilon}^k \otimes \bar{e}_i$$

Nous avons les résultats suivantes :

$$\{C_1(m)\}\,\bar{x} = m(\bar{x}) = \bar{x}' \qquad \bar{x}' \text{ appartient à } E$$

$$\{C_2(m)\}\,\underline{\phi} = m(\;)(\underline{\phi}) = \underline{\phi}' \qquad \underline{\phi}' \text{ appartient à } E^*$$

$$\bar{x}' = m^i_k\; x^k\; \bar{e}_i \qquad x^k = \underline{\epsilon}^k(\bar{x})$$

$$\underline{\phi}' = m^i_k\; \phi_i\; \underline{\epsilon}^k \qquad \phi_i = \underline{\phi}(\bar{e}_i)$$

$$\{C_1(m)\}\,(\bar{x} \otimes \underline{\phi}) = \{C_2(m)\}\,(\underline{\phi} \otimes \bar{x}) = M(\bar{x})\,(\underline{\phi})$$

$$\{C_1(m)\}\;v = v(m) = \{C_1(m^i_j\,\underline{\epsilon}^j \otimes \bar{e}_i)\}\;v^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{j_1 j_2 \ldots j_s}\,\underline{\epsilon}^{j_1} \otimes \underline{\epsilon}^{j_2} \otimes \ldots \otimes \underline{\epsilon}^{j_s} \otimes \bar{e}_{i_1} \otimes \bar{e}_{i_2} \cdot \otimes \bar{e}_{i_r}$$

$$= m^i_k \, v^k_i \, {}^{i_2 \dots i_r}_{j_2 \dots j_s} \, \underline{\epsilon}^j \otimes \underline{\epsilon}^{j_2} \dots \otimes \underline{\epsilon}^{j_s} \otimes \bar{e}_i \otimes \bar{e}_{i_2} \otimes \dots \bar{e}_{i_r}$$

par définition de la base duale et en généralisant la formule (4.0.4).

Introduisons le tenseur mixte m' d'ordre $s + r$, s fois covariant, r fois contravariant

$$m' = m^i_k \, v^k_{j_1} \, {}^{i_2 \dots i_r}_{j_2 \dots j_s} \, \underline{\epsilon}^{j_1} \otimes \underline{\epsilon}^{j_2} \otimes \dots \otimes \underline{\epsilon}^{j_s} \otimes \bar{e}_i \otimes \bar{e}_{i_2} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{i_r}$$

de composantes $m'^{i \; i_2 \dots i_r}_{j_1 j_2 \dots j_s} = m^i_k \, v^k_{j_1} \, {}^{i_2 \dots i_r}_{j_2 \dots j_s}$

dans la base $E^{*\otimes s} \otimes E^{\otimes r}$. Les composantes du tenseur contracté s'obtiennent en posant $i = j_1$ et en sommant de 1 à n.

Remarques

a) Le produit ordinaire de deux opérateurs linéaires A et B est en fait une contraction.

$$\{C_1(A)\} \; B = A.B$$

$$\{C_2(A)\} \; B = B.A$$

En effet, les composantes $(A \otimes B)^{i\,k}_{j\,\ell} = [A]^i_j \, [B]^k_\ell$ du produit tensoriel $A \otimes B$ donnent

* $[A]^i_j \, [B]^j_\ell = [A.B]^i_\ell$ par la contraction à gauche ($j = k$)

* $[A]^i_j \, [B]^k_i = [B.A]^k_j$ par la contraction à droite ($i = \ell$)

C'est la contraction du tenseur mixte A d'ordre deux par le tenseur mixte B d'ordre deux. Il y a bijection entre un tenseur mixte sur E et un opérateur linéaire sur E. Nous savons que A.B est différent de B.A de façon générale.

b) Soit A_T un tenseur mixte d'ordre deux. Soit $I = \bar{e}_i \otimes \underline{\epsilon}^i$ la décomposition dyadique de l'opérateur identité sur E. Montrons que la contraction de A_T par $\bar{e}_i \otimes \underline{\epsilon}^i$ est égale à la trace de A.

En effet,

$$\{C(\bar{e}_i \otimes \underline{\epsilon}^i)\} \; A_T = A_T(\bar{e}_i)(\underline{\epsilon}^i)$$

$$= \underline{\epsilon}^i (A \bar{e}_i)$$

$$= [A]^i_i = \mathrm{Tr}(A) \qquad \text{C.Q.F.D}$$

c) De ce qui précède, il suit qu'il est plus simple de définir la contraction d'un tenseur mixte à partir des composantes : il suffit d'égaliser un incide supérieur et un indice inférieur et de sommer ensuite sur cet indice. L'indépendance de la définition vis-à-vis d'une base est immédiate à partir des propriétés de covariance et de contravariance. Cette définition est non intrinsèque, c'est pourquoi nous n'avons pas voulu l'utiliser.

Dans une base de E et dans les bases induites par cette base de E, les tenseurs sont représentés par des matrices dont nous avons donné de façon pratique la formation [3]. Il est intéressant de chercher en gardant la même optique par quelle opération va être représentée la contraction. Ce sera l'objet d'étude de la Partie II.

▲

▲ ▲

BIBLIOGRAPHIE

[1] RAOELINA ANDRIAMBOLOLONA – RAMIARAMANANA D. I. De la définition intrinsèque des tenseurs et de son utilisation pratique en calcul tensoriel – Changement de bases. Ann. de l'Univ. de Madagascar, Série Sc. de la Nature et Math. N° *11* (1974), 19-43.

[2] RAOELINA ANDRIAMBOLOLONA – RAMIARAMANANA D. II. De la définition intrinsèque des tenseurs et de son utilisation pratique en calcul tensoriel – Changement de bases. Ann. de l'Univ. de Madagascar, Série Sc. de la Nature et Math. N° *12* (1975), 1-25.

[3] RAOELINA ANDRIAMBOLOLONA. – Représentation matricielle des bases et des tenseurs. Etude compacte. Ann. de l'Univ. de Madagascar, Série Sc. de la Nature et Math. N° *14* (1977), pp. 1-13.