Sciences de la Nature et Mathématiques, N° 14, 1977.

ETUDE INTRINSEQUE ET REPRESENTATION MATRICIELLE DES PRODUITS KRONECKERIENS ET DES PUISSANCES KRONECKERIENNES D'OPERATEURS LINEAIRES – ETUDE GENERALE

par RAOELINA ANDRIAMBOLOLONA

Laboratoire de Physique
Faculté des Sciences – B.P. 138
Université de Madagascar
Antananarivo – Madagascar.

RESUME

Après avoir défini de *façon intrinsèque* les produits kroneckeriens d'opérateurs linéaires, nous donnons leurs propriétés. Nous définissons de *façon formelle* les produits tensoriels de matrices quelconques. Nous démontrons de façon générale que la représentation matricielle des produits kroneckeriens et des puissances kroneckeriennes d'opérateurs linéaires quelconques est donnée par le produit tensoriel et les puissances tensorielles des matrices représentatives de ces opérateurs dans des bases. L'étude est faite à l'aide de la *formulation compacte* et n'utilise aucun indice, ce qui souligne son élégance, sa simplicité et sa généralité. La loi de transformation de la matrice représentative du produit kroneckerien est aussi donnée.

Les liens entre les algèbres linéaire et multilinéaire, entre les calculs matriciel et tensoriel sont mis ainsi en évidence.

ABSTRACT

After having defined Kronecker product of linear operators in an intrinsic formulation *we give their properties. Matrix tensor product is defined in a* formal way. *We show that matrix representations of linear operators Kronecker product and linear operator Kronecker powers are given by the tensor products and tensor powers of the matrices representing the operators. The study is performed using* compact formulation *without utilizing any indices. The method is simple, elegant and general. The law of matrix transformation of Kronecker product is given too.*

The link between linear and multilinear algebras, matrix and tensor calculi becomes then clear.

1. *INTRODUCTION*

Nous avons étudié dans les références [2a] et [2b] la représentation matricielle des tenseurs affines sur un espace vectoriel E en partant de la formulation intrinsèque des tenseurs. Nous avons donné aussi la loi de transformation induite par un changement de bases de E .

Rappelons que les tenseurs y sont définis comme étant les formes multilinéaires sur E ou/et sur l'espace dual E^*.

Nous allons continuer ce travail mais en le généralisant sur plusieurs plans. Nous allons prendre non plus des tenseurs affines sur E, mais des tenseurs sur des espaces vectoriels différents. L'opérateur linéaire a_i applique l'espace vectoriel E_i sur l'espace vectoriel F_i. Nous définissons de façon intrinsèque les produits kroneckeriens d'opérateurs linéaires a_i et nous donnons leurs différentes propriétés.

Nous abordons ensuite l'étude de la représentation matricielle du produit kroneckerien d'opérateurs dans des bases. Nous faisons l'étude en utilisant la *formulation compacte* sans employer aucun indice, mais en gardant les règles habituelles du calcul matriciel. Nous trouvons, après avoir introduit de façon tout à fait formelle le produit tensoriel de matrices quelconques, que la représentation matricielle du produit kroneckerien d'opérateurs linéaires est donnée par le produit tensoriel des matrices qui représentent ces opérateurs.

Nous obtenons pour le produit tensoriel $a_1 \otimes a_2 \otimes \ldots \otimes a_k$ la représentation matricielle $[A_1] \otimes [A_2] \otimes \ldots \otimes [A_k] = [M]$, produit tensoriel des matrices $[A_i]$ représentant l'opérateur a_i dans des bases données. L'élément M_p^ℓ se trouvant à la ligne ℓ et à la colonne p est relié aux éléments $[A]_{j_\alpha}^{i_\alpha}$ suivant les formules :

$$
(1.1)\quad
\begin{cases}
M_p^\ell = [A_1]_{j_1}^{i_1} [A_2]_{j_2}^{i_2} \ldots [A_k]_{j_k}^{i_k} \\[2ex]
\ell = n_k\, n_{k-1} \ldots n_3\, n_2 (i_1 - 1) + n_k\, n_{k-1} \ldots n_3 (i_2 - 1) + \ldots \\
\qquad + n_k\, n_{k-1} \ldots n_{j+1} (i_j - 1) + \ldots + n_k (i_{k-1} - 1) + i_k \\[2ex]
p = m_k\, m_{k-1} \ldots m_3\, m_2 (j_1 - 1) + m_k\, m_{k-1} \ldots m_3 (j_2 - 1) + \ldots \\
\qquad + m_k\, m_{k-1} \ldots m_{r+1} (j_r - 1) + \ldots + m_k (j_{k-1} - 1) + j_k \\[2ex]
\text{où} \begin{cases} i_\alpha = (1, \ldots, n_k) & \text{pour } \alpha = (1, \ldots, k) \\ j_\alpha = (1, \ldots m_k) & \text{pour } \alpha = (1, \ldots, k) \end{cases}
\end{cases}
$$

Les matrices $[A_i]$ sont des matrices à n_i lignes et à m_i colonnes. La valeur de ℓ varie de 1 à $n_k\, n_{k-1} \ldots n_1$ et celle de p de 1 à $m_k\, m_{k-1} \ldots m_1$. La matrice $[M]$ est donc une matrice à $n_k . n_{k-1} \ldots n_1$ lignes et à $m_k . m_{k-1} \ldots m_1$ colonnes.

Nous examinons ensuite le problème du changement de bases dans le cas général. Nous trouvons que si $[M]$ et $[M']$ sont les matrices représentant le même produit kroneckerien $a_1 \otimes a_2 \otimes \ldots \otimes a_k$ des opérateurs linéaires a_i, et si $[t_i]$ et $[s_i]$ sont les matrices de changement de bases de F_i et de E_i, nous avons :

$$(1.2) \qquad [M'] = [T]^{-1} . [M] . [S]$$

où

$$[S] = [s_1] \otimes [s_2] \otimes \ldots \otimes [s_k]$$

$$[T] = [t_1] \otimes [t_2] \otimes \ldots \otimes [t_k]$$

$$[T]^{-1} = [t_1]^{-1} \otimes [t_2]^{-1} \otimes \ldots \otimes [t_k]^{-1}$$

Faisons remarquer que la matrice $[S]$ est une matrice *carrée* de dimension $m_1 \times m_2 \times \ldots \times m_k$, la matrice $[T]$, une matrice *carrée* de dimension $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$, la matrice $[M]$ ou $[M']$, une matrice rectangle à $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$ lignes et à $m_1 \times m_2 \times \ldots \times m_k$ colonnes.

Nous indiquons dans la Section 3 la façon pratique pour obtenir ces matrices sans aucune difficulté, sans utiliser aucune formule en construisant des tableaux d'une certaine façon.

La formule (1.2) est la transcription matricielle de la transformation des produits kroneckeriens d'opérateurs dans un changement de bases. Elle est la généralisation de la formule de transformation d'un tenseur mixte dans un changement de bases. Nous étendons ainsi au cas le plus général la formule de transformation des composantes d'un tenseur mixte quelconque. Nous appliquons les résultats obtenus aux puissances kroneckeriennes d'opérateurs pour montrer que nous obtenons comme cas particulier et de façon rapide et élégante les relations données dans la référence [2b].

Nous terminons en faisant remarquer que l'étude s'étend sans difficulté aux opérateurs *antilinéaires*.

2. *DEFINITION INTRINSEQUE ET PROPRIETES DES PRODUITS KRONECKERIENS D'OPERATEURS LINEAIRES.*

2.1. — Définition

Soient

* k espaces vectoriels E_i sur le corps K,
* k espaces vectoriels F_i sur K

* k opérateurs linéaires a_i appliquant E_i danş F_i (donc éléments de $\mathcal{L}(E_i, F_i)$).
* a_i^t l'opérateur transposé de a_i (appliquant l'espace dual F_i^* dans l'espace dual E_i^*, élément donc de $\mathcal{L}(F_i^*, E_i^*)$.
* $\underline{\phi}_i$ des covecteurs quelconques de F_i^* (ou formes linéaires sur F_i).
* ω un tenseur quelconque du produit tensoriel $E_1 \otimes E_2 \otimes .... \otimes E_k = \bigotimes_{i=1}^{k} E_i$.

Rappelons que les tenseurs sont définis comme étant des formes multilinéaires sur les produits tensoriels d'espaces vectoriels.

Nous définissons le produit kroneckerien $a_1 \otimes a_2 \otimes .... \otimes a_k$ des opérateurs a_j par la relation :

$$(2.1.1) \quad \{(a_1 \otimes a_2 \otimes .... \otimes a_k)\, \omega\}(\underline{\phi}_1)(\underline{\phi}_2)....(\underline{\phi}_k) = \omega(a_1^t \underline{\phi}_1)(a_2^t \underline{\phi}_2)....(a_k^t \underline{\phi}_k)$$

Le second membre est un élément du corps K.

2.2. – Propriétés

Propriété 1.

De la définition (2.1.1), il est facile de montrer que le produit kroneckerien $a_1 \otimes a_2 \otimes .... \otimes a_k = \bigotimes_{j=1}^{k} a_j$ est un opérateur linéaire appliquant $E_1 \otimes E_2 \otimes .... \otimes E_k$ dans $F_1 \otimes F_2 \otimes F_k$.

Propriété 2.

Soient a_i un opérateur linéaire appliquant E_i dans F_i, (donc élément de $\mathcal{L}(E_i, F_i)$), b_i un opérateur linéaire appliquant F_i dans G_i (donc élément de $\mathcal{L}(F_i, G_i)$),

$\otimes E_i = E_1 \otimes E_2 \otimes .... \otimes E_k$; $\otimes F_i = F_1 \otimes F_2 \otimes .... F_k$,

$\otimes G_i = G_1 \otimes G_2 \otimes .... \otimes G_k$; i étant un indice variant de 1 à k.

Nous avons :

$$(2.2.1) \quad (b_1\, a_1) \otimes (b_2\, a_2) \otimes .... \otimes (b_k\, a_k = (b_1 \otimes b_2 .... \otimes b_k) \cdot (a_1 \otimes a_2 \otimes .... \otimes a$$

Démonstration

Pour tout $\underline{\gamma}_i$ de G_i^*, tout ω de E_i et tout $\underline{\phi}_i = b_i^t\, \underline{\gamma}_i$ où $\underline{\phi}_i$ appartenant à F_i^* est le transformé de $\underline{\gamma}_i$ de G_i^* par l'opérateur transposé b_i^t de b_i , nous avons :

$$\{(b_1\, a_1 \otimes b_2\, a_2 \otimes .... \otimes b_k\, a_k)\, \omega\}\, (\underline{\gamma}_1)(\underline{\gamma}_2)....(\underline{\gamma}_k)$$

$$= \omega([b_1\, a_1]^t\, \underline{\gamma}_1)\, ([b_2\, a_2\, ^t\, \underline{\gamma}_2)....(\, b_k\, a_k]^t\, \underline{\gamma}_k) \text{ par définition } (2.1.1)$$

$$= \omega(a_1^t\, b_1^t\, \underline{\gamma}_1)(a_2^t\, b_2^t\, \underline{\gamma}_2)\ \ldots(a_k^t\, b_k^t\, \underline{\gamma}_k) \quad \text{car } (b_j\, a_j)^t = a_j^t\, b_j^t$$

$$= \{(a_1 \otimes a_2 \otimes \ldots\, a_k)\,\omega\}\ (b_1^t\underline{\gamma}_1)(b_2^t\,\underline{\gamma}_2)\ \ldots(b_k^t\,\underline{\gamma}_k) \text{ par définition } (2.1.1)$$

$$= \{(b_1 \otimes b_2 \otimes \ldots \otimes b_k)\cdot(a_1 \otimes a_2 \otimes \ldots \otimes a_k)\,\omega\}\ (\underline{\gamma}_1)(\underline{\gamma}_2)\ldots(\underline{\gamma}_k)$$

C.Q.F.D.

Remarquons que $b_i\, a_i$ est un élément de $\mathcal{L}(E_i\,, G_i)$, que $a_1 \otimes a_2 \otimes \ldots \otimes a_k = \otimes\, a_i$ est un élément de $\mathcal{L}(\otimes E_i\,, \otimes\, F_i)$, que $b_1 \otimes b_2 \otimes \ldots\, b_k = \otimes\, b_j$ est un élément de $\mathcal{L}(\otimes F_i\,, \otimes G_i)$. Le produit dans le second membre (2.2.1) est celui d'un élément de $\mathcal{L}(\otimes F_i\,, \otimes G_i)$ par un élément de $\mathcal{L}(\otimes E_i\,, \otimes F_i)$.

Propriété 3.

Si tous les opérateurs a_i sont réguliers, $a_1 \otimes a_2 \otimes \ldots \otimes a_j$ est régulier ; et nous avons :

$$(2.2.2) \quad \{a_1 \otimes a_2 \otimes \ldots \otimes a_k\}^{-1} = (a_1)^{-1} \otimes (a_2)^{-1} \otimes \ldots \otimes (a_k)^{-1}$$

Démonstration

La régularité du produit kroneckerien s'obtient à partir de la définition de la régularité. La relation (2.2.2) s'obtient à partir de celle (2.2.1) en prenant $b_i = (a_i)^{-1}$ pour i variant de 1 à k.

Propriété 4.

Pour tout $\overline{x}_i$ de E_i, pour tout a_i de $\mathcal{L}(E_i\,, F_1)$, et pour tout i variant de 1 à k, nous avons :

$$(2.2.3) \quad \{a_1 \otimes a_2 \otimes \ldots \otimes a_k\}\ (\overline{x}_1 \otimes \overline{x}_2 \otimes \ldots \overline{x}_k) = a_1\, \overline{x}_1 \otimes a_2\, \overline{x}_2 \otimes \ldots \otimes a_k\, \overline{x}_k$$

Démonstration

Pour tout covecteur ϕ_1 de F_i^*, nous avons :

$$\{a_1 \otimes a_2 \otimes \ldots \otimes a_k\}\ (\overline{x}_1 \otimes \overline{x}_2 \otimes \ldots \otimes \overline{x}_k)(\phi_1)(\phi_2)\ldots(\phi_k)$$

$$= (\overline{x}_1 \otimes \overline{x}_2 \otimes \ldots \otimes \overline{x}_k)(a_1^t\, \phi_1)(a_2^t\, \phi_2)\ldots(a_k^t\, \phi_k)$$

par définition (2.1.1) du produit kroneckerien d'opérateurs

$$= \underbrace{a_1^t\, \phi_1(\overline{x}_1)}\cdot \underbrace{a_2^t\, \phi_2(\overline{x}_2)} \ldots \underbrace{a_k^t\, \phi_k(\overline{x}_k)}$$ par définition du produit tensoriel $\overline{x}_1 \otimes \overline{x}_2 \ldots \otimes \overline{x}_j$

$$= \underbrace{\phi_1 (a_1 \bar{x}_1)} \cdot \underbrace{\phi_2 (a_2 \bar{x}_2)} \dots \underbrace{\phi_k (a_k \bar{x}_k)}$$ par définition de l'opérateur transposé

$$= (a_1 \bar{x}_1 \otimes a_2 \bar{x}_2 \otimes \dots \otimes a_k \bar{x}_k)(\phi_1)(\phi_2)\dots(\phi_k)$$ par définition du produit tensoriel

C.Q.F.D.

Propriété 5.

$$\mathrm{Tr}\{a_1 \otimes a_2 \dots \otimes a_k\} = \mathrm{Tr}(a_1) \cdot \mathrm{Tr}(a_2) \dots \mathrm{Tr}(a_k)$$

où Tr désigne la trace.

Démonstration

Soit $(\bar{e}_i)$ une base de E_i et $(\underline{\epsilon}^i)$ la base duale dans F_i^* supposé ayant la même dimension que E_i

$$\mathrm{Tr}\{a_1 \otimes a_2 \otimes \dots \otimes a_k\} = (\{a_1 \otimes a_2 \otimes \dots \otimes a_k\} \underline{\epsilon}^{i_1} \otimes \underline{\epsilon}^{i_2} \otimes \dots \otimes \underline{\epsilon}^{i_k})(e_{i_1})(e_{i_2})\dots(e_{i_k})$$

$$= \underline{\epsilon}^{i_1}(a_1 \bar{e}_{i_1}) \underline{\epsilon}^{i_2}(a_2 \bar{e}_{i_2}) \dots \underline{\epsilon}^{i_k}(a_k \bar{e}_{i_k})$$

$$= \mathrm{Tr}(a_1)\ \mathrm{Tr}(a_2)\dots \mathrm{Tr}(a_k)$$

car $\underline{\epsilon}^i(a_j \bar{e}_i) = [A_j]^i_i = \mathrm{Tr}(a_j)$ C.Q.F.D.

Propriété 6.

$$\{a_1 \otimes a_2 \otimes \dots \otimes a_k\}^t = a_1^t \otimes a_2^t \otimes \dots \otimes a_k^t$$

où t signifie le transposé.

Démonstration

Nous pouvons identifier $(E_1 \otimes E_2 \otimes \dots \otimes E_k)^*$ et $E_1^* \otimes E_2^* \otimes \dots \otimes E_k^*$ pour le fini. Le produit kroneckerien $(a_1 \otimes a_2 \otimes \dots \otimes a_k)^t$ est un opérateur linéaire appliquant $(\otimes F_i)^* = \otimes F_i^*$ dans $(\otimes E_i)^* = \otimes E_i^*$. Pour tout ϕ_i de F_i^* et tout x_i de E_i, nous avons :

$$(\{a_1 \otimes a_2 \otimes \dots \otimes a_k\}^t \phi_1 \otimes \phi_2 \dots \otimes \phi_k)(\bar{x}_1)(\bar{x}_2)\dots(\bar{x}_k)$$

$$= (\phi_1 \otimes \phi_2 \otimes \dots \otimes \phi_k)(a_1 \bar{x}_1)(a_2 \bar{x}_2)\dots(a_j \bar{x}_k)$$

par définition de la transposition t

$$= \underbrace{\phi_1 (a_1 \bar{x}_1)} \cdot \underbrace{\phi_2 (a_2 \bar{x}_2)} \dots \underbrace{\phi_j (a_k \bar{x}_k)}$$

par définition du produit tensoriel

$$= \underbrace{a_1^t\ \Phi_1(\bar{x}_1)}\ .\ \underbrace{a_2^t\ \Phi_2(\bar{x}_2)}\ ....\ \underbrace{a_j^t\ \Phi_k(\bar{x}_k)}$$

par définition de la transposition t

$$= (a_1^t\ \Phi_1 \otimes a_2^t\ \Phi_2 \otimes .... \otimes a_k^t\ \Phi_k)(\bar{x}_1)(\bar{x}_2)....(\bar{x}_k)$$

par définition du produit tensoriel

$$= (\{a_1^t \otimes a_2^t \otimes .... \otimes a_k^t\}\ \Phi_1 \oplus \Phi_2 \otimes .... \otimes \Phi_k)(\bar{x}_1)(\bar{x}_2)....(\bar{x}_k)$$

d'après la propriété (2.2.3) C.Q.F.D.

3. *PRODUIT TENSORIEL DE MATRICES*

Etant donné deux matrices [A] d'élément $A_{j_1}^{i_1}$ et [B] = [$B_{j_2}^{i_2}$] d'élément $B_{j_2}^{i_2}$, nous définissons le produit tensoriel [C] = [A] ⊗ [B] de la matrice [A] par la matrice [B] comme étant la matrice [C] dont les éléments sont

$$C_{j_1\ j_2}^{i_1\ i_2} = A_{j_1}^{i_1}\ B_{j_2}^{i_2} \tag{3.1}$$

Nous pouvons représenter la matrice [C] sous forme de matrice [γ_p^ℓ] en rangeant les indices (i_1 , i_2) et (j_1 , j_2) de sorte que la ligne ℓ et la colonne k sont données par

$$\begin{cases} \ell = n_2(i_1 - 1) + i_2 \\ p = m_2(j_1 - 1) + j_2 \end{cases} \tag{3.2}$$

où :

$$\begin{cases} i_1 = (1, ..., n_1) & i_2 = (1, ..., n_2) \\ j_1 = (1, ..., m_1) & j_2 = (1, ..., m_2) \end{cases}$$

Pour i_1 et j_1 fixés, c.à.d. pour l'élément $A_{j_1}^{i_1}$ fixé, les indices i_2 et j_2 de $B_{j_2}^{i_2}$ dans l'expression (3.1) varient de façon que le rangement (3.2) revient en fait à supprimer toutes les barres intérieures apparaissant dans l'expression de $\left[A_j^i\ [B]\right]$ soit :

$$[A] \otimes [B] = \begin{bmatrix} A_1^1\ [B] & A_2^1\ [B] .... & A_{m_1}^1\ [B] \\ A_1^2\ [B] & A_2^2\ [B] .... & A_{m_1}^2\ [B] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_1^{n_1}\ [B] & A_2^{n_1}\ [B] .... & A_{m_1}^{n_1}\ [B] \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

Dans le deuxième membre de (3.3), il suffit maintenant d'exprimer les produits $A^{i_1}_{j_1}$ [B] en fonction des éléments $A^{i_1}_{j_1}$ et $B^{i_2}_{j_2}$ et de supprimer les barres intérieures correspondant aux matrices $A^{i_1}_{j_1}$ [B]. Les indices i_1, i_2, et j_1 et j_2 sont *automatiquement* rangés suivant les formules (3.2).

A titre d'exemple, prenons

$$[A] = \begin{bmatrix} a^1_1 & a^1_2 \\ a^2_1 & a^2_2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [B]^{\cdot} = [b^1_1 \;\; b^1_2 \;\; b^1_3]$$

$$[A] \otimes [B] = \begin{bmatrix} a^1_1 \, [B] & a^1_2 \, [B] \\ a^2_1 \, [B] & a^2_2 \, [B] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^1_1 \, [b^1_1 \;\; b^1_2 \;\; b^1_3] & a^1_2 \, [b^1_1 \;\; b^1_2 \;\; b^1_3] \\ a^2_1 \, [b^1_1 \;\; b^1_2 \;\; b^1_3] & a^2_2 \, [b^1_1 \;\; b^1_2 \;\; b^1_3] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^1_1 \, b^1_1 & a^1_1 \, b^1_2 & a^1_1 \, b^1_3 & a^1_2 \, b^1_1 & a^1_2 \, b^1_2 & a^1_2 \, b^1_3 \\ a^2_1 \, b^1_1 & a^2_1 \, b^1_2 & a^2_1 \, b^1_3 & a^2_2 \, b^1_1 & a^2_2 \, b^1_2 & a^2_2 \, b^1_3 \end{bmatrix}$$

Il est facile de vérifier que nous avons bien la formule (3.2). Nous allons chercher sa généralisation.

Désignons par (i_2, i_3) le groupement des indices (i_2, i_3) suivant la règle définie par (3.2).

Nous avons :

$(i_2, i_3) = n_3\,(i \;\; -1) + i_3$ avec comme valeur maximum du groupement $n_3\,(n_2 - 1) + n_3 = n_3 n_2$.

$$(i_1, (i_2, i_3)) = n_3 n_2\,(i_1 - 1) + n_3(i_2 - 1) + i_3$$

Nous allons démontrer par récurrence la valeur de ℓ dans le cas où nous avons $i_1, i_2, \dots, i_k$ variant respectivement de 1 à n_1, de 1 à n_2,...., de 1 à n_k.

Supposons la relation vraie pour les (k – 1) indices :

(3.4) $$(i_2, i_3, \dots, i_k) = n_k\, n_{k-1} \cdots n_3 (i_2 - 1) + n_k\, n_{k-1} \cdots n_4 (i_3 - 1) + \dots + n_k (i_{k-1} - 1) + i_k$$

dont la valeur maxima est égale à :

$$n_k\ n_{k-1} \ldots n_3(n_2-1) + n_k\ n_{k-1} \ldots n_4(n_3-1) + \ldots + n_k(n_{k-1}-1) + n_k$$

$$(3.5) \qquad = n_k\ n_{k-1} \ldots n_3 n_2$$

Utilisons la relation (3.2) pour le groupement $(i_1, i_2, i_3 \ldots i_k)$:

$$(i_1 (i_2, i_3, \ldots, i_k)) = n_k\ n_{k-1} \ldots n_3 n_2 (i_1 - 1) + (i_2, i_3, \ldots, i_k)$$

Nous remplaçons le deuxième terme du second membre par (3.4). Nous avons la première relation. La seconde relation s'obtient par analogie à partir de la première.

$$(3.6) \quad \begin{cases} \ell = (i_1, i_2, i_3, \ldots, i_k) = (i_1, (i_2, i_3, \ldots, i_k) \\ \qquad = n_k\ n_{k-1} \ldots n_{j+1}(i_j - 1) + \ldots + n_k(i_{k-1} - 1) + i_k \\ p = (j_1, j_2, \ldots j_k) = m_k\ m_{k-1} \ldots m_3 m_2 (j_1 - 1) + m_k m_{k-1} \ldots m_3 (j_2 - 1) + \ldots \\ \qquad + m_k m_{k-1} \ldots m_{r+1}(i_r - 1) + \ldots + m_k(j_{k-1} - 1) + j_k \\ \text{où} \quad i_\alpha = (1, \ldots, n_k) \quad \text{pour} \quad \alpha = (1, \ldots, k) \\ \qquad j_\alpha = (1, \ldots, m_k) \quad \text{pour} \quad \alpha = (1, \ldots, k) \end{cases}$$

Les relations (3.6) donnent la ligne ℓ et la colonne p de la place de l'élément

$$(3.7) \qquad [A^{i_1}_{j_1}\ B^{i_2}_{j_2}\ C^{i_3}_{j_3} \ldots R^{i_k}_{j_k}]$$

dans la matrice représentatrice du produit tensoriel $[A] \otimes [B] \otimes [C] \otimes \ldots \otimes [R]$ des matrices $[A], [B], [C]$ et $[R]$. En écrivant le produit tensoriel de matrices, nous avons supposé que *celui-ci est associatif*, ce qui est d'ailleurs facile à montrer, soit directement à partir de la loi (3.3) de formation pratique soit à partir des relations (3.6).

4. *REPRESENTATION MATRICIELLE DU PRODUIT KRONECKERIEN D'OPERATEURS*

Nous allons chercher la représentation matricielle du produit kroneckerien d'opérateurs linéaires dans une base tel qu'il est défini au paragraphe 2.1.

Soient $(\bar{e}_{\alpha, i_\alpha})$ une base de E_α, $(\underline{\epsilon}^{j_\alpha}_\alpha)$ la base duale donc de E^*_α, $(\bar{f}_{\alpha, i_\alpha})$ une base de F_α et $(\underline{\phi}^{j_\alpha}_\alpha)$ sa base duale donc une base de F^*_α.

Il est facile de montrer les résultats suivants :

$$(4.1)\quad \begin{cases} g_{j_1 j_2 \ldots j_k} = \bar{e}_{1,j_1} \otimes \bar{e}_{2,j_2} \otimes \ldots \otimes \bar{e}_{k,j_k} & \text{est la base induite de } \otimes E_\alpha . \\ g^{*i_1 i_2 \ldots i_k} = \underline{\epsilon}_1^{i_1} \otimes \underline{\epsilon}_2^{i_2} \otimes \ldots \otimes \underline{\epsilon}_k^{i_k} & \text{est la base induite de } \otimes E^*_\alpha . \\ h_{j_1 j_2 \ldots j_k} = \bar{f}_{1,j_k} \otimes \bar{f}_{2,j_2} \otimes \ldots \otimes \bar{f}_{k,j_k} & \text{est la base induite de } \otimes F_\alpha . \\ h^{*i_1 i_2 \ldots i_k} = \underline{\phi}_1^{i_1} \otimes \underline{\phi}_2^{i_2} \otimes \ldots \otimes \underline{\phi}_k^{i_k} & \text{est la base induite de } \otimes F^*_\alpha . \end{cases}$$

Ces bases sont suivant notre convention (voir référence [1] et [2]) représentées respectivement par la matrice-ligne $\underline{G}^*$ dont la colonne p est donnée par (3.6), par la matrice-colonne $\overline{G}$ dont la ligne ℓ est donnée par (3.6), et par la matrice-ligne $\underline{H}^*$ dont la colonne p est donnée par (3.6), et par la matrice-colonne $\overline{H}$ dont la ligne ℓ est donnée par (3.6).

Dans les bases $\overline{G}$ et $\underline{H}^*$, l'opérateur linéaire $a_1 \otimes a_2 \otimes \ldots \otimes a_k$ de $\mathcal{L}(\otimes E_\alpha, \otimes F_\alpha)$ va être représenté par la matrice [M] tel que :

$$(4.2)\qquad a_1 \otimes a_2 \otimes \ldots \otimes a_k = \underline{H}^* \cdot [M] \cdot \overline{G}$$

Dans le second membre, la ligne ℓ et la colonne p de l'élément M^ℓ_p de la matrice [M] est donnée par (3.6). Nous avons alors :

$$M^\ell_p = (a_1 \otimes a_2 \otimes \ldots \otimes a_k)(\underline{\epsilon}_1^{i_1} \otimes \underline{\epsilon}_2^{i_2} \otimes \ldots \otimes \underline{\epsilon}_k^{i_k})\ (\bar{e}_{1,j_1})(\bar{e}_{2,j_2})\ldots(\bar{e}_{k,j_k})$$

$$= \underbrace{\underline{\epsilon}_1^{i_1}(a_1\, \bar{e}_{1,j_1})}\ \ldots\ldots \underbrace{\underline{\epsilon}_k^{i_k}(a_k\, \bar{e}_{k,j_k})}$$

$$(4.3)\qquad M^\ell_p = a_{1,j_1}^{\ i_1} \cdot a_{2,j_2}^{\ i_2} \ldots a_{k,j_k}^{\ i_k}$$

Le résultat du paragraphe 3 montre :

$$(4.4)\qquad [M] = [A_1] \otimes [A_2] \otimes \ldots \otimes [A_k]$$

où les matrices $[A_i]$ représentent les opérateurs a_i dans les bases de E_i et de F_i. d'où

Théorème

La représentation matricielle du produit kröneckerien $a_1 \otimes a_2 \otimes .... \otimes a_k$ des opérateurs linéaires a_i de $\mathcal{L}$ (E_i, F_i) pour i variant de 1 à k dans les bases induites est donnée par le produit tensoriel $[A_1] \otimes [A_2] \otimes .... [A_k]$ des matrices $[A_i]$ représentant les opérateurs a_i dans les bases de E_i et de F_i .

Les bases induites sur $\otimes E_i$ et $\otimes F_i$ par les bases de E_i et de F_i établissent une bijection entre les produits kroneckeriens d'opérateurs et le produit tensoriel des matrices représentant ces opérateurs dans les bases de E_i et de F_i .

Comme conséquence, les propriétés des produits kroneckeriens d'opérateurs linéaires données au paragraphe 2 s'étendent toutes aux produits tensoriels de matrices tels qu'ils sont définis de *façon formelle* par la relation (3.3).

5. *TRANSFORMATION INDUITE PAR UN CHANGEMENT DE. BASES POUR LA REPRESENTATION MATRICIELLE DES PRODUITS KRONECKERIENS D'OPERATEURS LINEAIRES*

Gardons les mêmes notations données dans le paragraphe 4.

Soient $[s_\alpha]$ et $[t_\alpha]$ les matrices de changement de bases nécessairement régulières, dont les éléments $s_{\alpha,\, j_\alpha}^{\ i_\alpha}$ sont définis par :

$$(5.1) \quad \begin{cases} \bar{e}'_{\alpha,\, j_\alpha} = s_{\alpha,\, j_\alpha}^{\ i_\alpha}\ \bar{e}_{\alpha,\, i_\alpha} \\ \bar{f}'^{\ i_\beta}_{\alpha,\, j_\beta} = t_{\alpha,\, j_\beta}^{\ i_\beta}\ \bar{f}_{\alpha,\, i_\beta} \end{cases}$$

Les relations (5.1) se mettent sous forme matricielle (voir paragraphe 4 de la référence [1]) :

$$(5.2) \quad \begin{cases} \underline{B}'^* = \underline{B}^* \cdot [s_\alpha] \\ \underline{C}'^* = \underline{C}^* \cdot [t_\alpha] \end{cases},$$

où $\underline{B}^*$, $\underline{C}^*$ représentent les matrices-lignes formées par les vecteurs de bases, $\underline{B}'^*$ et $\underline{C}'^*$ leurs transformées par les matrices de changements de bases.

Pour les bases induites $\bar{G}$ dans $\otimes E_\alpha^*$ et $\underline{H}^*$ dans $\otimes F_\alpha$, nous avons pour les transformées $\bar{G}'$ et $\underline{H}'^*$ les relations :

$$(5.3) \quad \begin{cases} \bar{G}' = [\Sigma] \cdot \bar{G} & \text{c'est l'équivalent de la formule 4.1.4.1 de la référence [1]} \\ \underline{H}'^* = \underline{H}^* \cdot [T] & \text{c'est l'équivalent de la formule 4.1.3.1 de la référence [1]} \end{cases}$$

$$(5.4) \quad \text{où} \quad \begin{cases} [\Sigma] = [S]^{-1} \\ [S] = [s_1] \otimes [s_2] \otimes .... \otimes [s_k] \\ [T] = [t_1] \otimes [t_2] \otimes .... \otimes [t_k] \end{cases}$$

De la relation (4.2), et à partir de (5.3), nous obtenons

$$[M] = [T] . [M'] . [\Sigma]$$

soit

$$[M'] = [T]^{-1} [M] [\Sigma]^{-1}$$

soit

$$(5.5) \quad [M'] = [T]^{-1} . [M] . [S]$$

Remarques

a) Le résultat (5.5) peut être considéré comme la loi de transformation des composantes du tenseur mixte qui peut être associé de façon bijective au produit kroneckerien d'opérateurs dans un changement de bases. (c.f. par exemple le paragraphe 4.2.5 de la référence [1]).

b) Nous pouvons l'obtenir en raisonnant de la façon suivante. La matrice [M'] représentant $a_1 \otimes a_2 \otimes .... \otimes a_k$ est donnée d'après (4.4) par :

$$[M'] = [A'_1] \otimes [A'_2] \otimes .... \otimes [A'_k]$$

Or la loi de transformation induite par un changement de bases de B_i et de F_i de la matrice $[A_i]$ représentant a_i de $\mathcal{L}(E_i, F_i)$ est :

$$[A'_i] = [t_i]^{-1} . [A_i] . [s_i]$$

d'où

$$[M'] = ([t_1]^{-1} . [A_1].[s_1]) \otimes .... \otimes ([t_k]^{-1} [A_k].[s_k])$$

L'utilisation des relations (2.2.1) et (2.2.2) donne alors la relation (5.5).

c) En langage matriciel, comme [T] et [S] sont réguliers, les matrices [M] et [M'] reliées par la relation (5.5) sont dites ***équivalentes***. Les matrices équivalentes peuvent être considérées comme représentant le ***même*** opérateur (ou le ***même*** tenseur) dans des bases ***différentes***. Elles définissent un ***seul*** opérateur (ou un seul tenseur).

6. *REPRESENTATION MATRICIELLE DE* $(a_1 \otimes a_2 \otimes .... \otimes a_k)$ u *DANS UNE BASE.*

Soit u un élément de $\otimes E_\alpha$. Dans la base induite $\underline{G}^*$ de $\otimes E_\alpha$, nous avons

$$u = \underline{G}^* . \bar{U}$$

où U est une matrice-colonne,

$$(a_1 \otimes a_2 \otimes \ldots \otimes a_k)u = \underline{H}^* . [M] . \bar{G} . \underline{G}^* . \bar{U} \quad \text{en utilisant (4.2)}$$

$$= \underline{H}^* . [M] . \bar{U} \quad \text{car } G . \underline{G}^* \text{ est égal à la matrice-identité.}$$

Nous lisons que les composantes de $(a_1 \otimes a_2 \otimes \ldots \otimes a_k)u$ sur $\underline{H}^*$ sont données par le produit de matrices $[M] . \bar{U}$.

7. *CAS PARTICULIER DES PUISSANCES KRONECKERIENNES D'UN OPERATEUR LINEAIRE DE* E .

Prenons le cas particulier $E_i = F_i = E$; $a_i = a$ c.à.d. les opérateurs linéaires sur E et les puissances kroneckeriennes $a^{\otimes p}$ d'ordre p de a.

Les résultats précédents donnent les relations suivantes :

$$a^{\otimes p} = a \otimes a \otimes \ldots \otimes a$$

$a^{\otimes p}$ est un élément de $\mathcal{L}(E^{\otimes p}, E^{\otimes p})$

$(a\,b)^{\otimes p} = a^{\oplus p}\, b^{\otimes p}$ pour a et b de $\mathcal{L}(E,E)$

$$(a^{-1})^{\otimes p} = (a^{\otimes p})^{-1}$$

$$a^{\otimes p}\ \bar{x}_1 \otimes \bar{x}_2 \ldots \otimes \bar{x}_p = a\bar{x}_1 \otimes a\bar{x}_1 \otimes \ldots \otimes a\bar{x}_p$$

$$\mathrm{Tr}(a^{\otimes p}) = (\mathrm{Tr}\, a)^p$$

$$(a^{\otimes p})^t = (a^t)^{\otimes p}$$

Si a est représenté par la matrice $[A]$ dans une base de E, nous avons pour la matrice représentative de $a^{\otimes p}$ la matrice $[\alpha^{\ell}_m] = [A]^{\otimes p}$ telles que la ligne ℓ et la colonne m s'obtiennent à partir des relations (3.6) en y posant $n_i = m_i = n$:

$$\begin{cases} \ell = n^{p-1}(i_1 - 1) + n^{p-2}(i_2 - 1) + \ldots + n(i_{p-1} - 1) + i_p \\ k = n^{p-1}(j_1 - 1) + n^{p-2}(j_2 - 1) + \ldots + n(j_{p-1} - 1) + j_p \end{cases}$$

où n désigne la dimension de E.

Nous retrouvons les résultats du paragraphe 4.5.1 de la référence [1] de façon plus simple et élégante.

8. *REMARQUES ET CONCLUSION*

Dans les travaux [2a] et [2b], nous avons raisonné à partir des composantes et dans le cas particulier du changement de bases, c.à.d. uniquement dans le cas des puissances kroneckeriennes d'opérateurs en nous limitant aux tenseurs affines sur un espace vectoriel.

Dans le présent travail, nous avons généralisé l'étude au cas des produits tensoriels d'espaces vectoriels quelconques, à celui des produits kroneckeriens d'opérateurs linéaires a_i d'un espace vectoriel E_i sur un autre espace F_i. Après avoir introduit de façon formelle le produit tensoriel de matrices, nous avons montré en utilisant la *formulation compacte* que dans les bases induites dans $\otimes E_i$ et $\otimes F_i$ par des bases de E_i et de F_i le produit kroneckerien des opérateurs a_i est représenté par le produit tensoriel des matrices $[A_i]$ représentatives de a_i.

En gardant la même optique, nous avons donné la loi de transformation de la représentation matricielle des produits kroneckeriens d'opérateurs linéaires lors d'un changement de bases. Et nous terminons l'étude en considérant la représentation matricielle de la transformée d'un tenseur par le produit kroneckerien d'opérateurs linéaires, ainsi que le cas particulier des puissances kroneckeriennes d'un opérateur linéaire sur E.

Nous concluons en faisant remarquer que l'étude peut être étendue sans aucune difficulté pour les opérateurs antilinéaires. Il suffit de prendre le complexe conjugué du second membre de la définition (2.1.1).

BIBLIOGRAPHIE

[1] RAOELINA ANDRIAMBOLOLONA. – Représentation matricielle des bases et des tenseurs.Etude compacte. Ann. Univ. Madagascar, Série Sc. Nature et Math. N° *14* (1977), pp. 1-13.

ou Pour une étude des tenseurs affines sur un espace vectoriel à partir des composantes, voir

[2] RAOELINA ANDRIAMBOLOLONA – RAMIARAMANANA D. – De la définition intrinsèque des tenseurs et de son utilisation pratique en calcul tensoriel. Changement de base.

[2a] I. Ann. Univ. Madagascar, Série Sc. de la Nature et Math., N° *11* (1974) pp. 19-43.

[2b] II. Ann. Univ. Madagascar, Série Sc. Nature et Math., N° *12* (1975) pp. 1-27.