Sciences de la Nature et Mathématiques, N° 14, 1977.

REPRESENTATION MATRICIELLE DES BASES ET DES TENSEURS – ETUDE COMPACTE

par RAOELINA ANDRIAMBOLOLONA

Laboratoire de Physique
Faculté des Sciences – B.P. 138
Université de Madagascar
Antananarivo – Madagascar.

RESUME

Nous continuons l'étude donnée dans les références [1] et [2] mais vue sous l'optique de la *formulation compacte*. Ainsi, nous donnons les représentations matricielles des bases de l'espace vectoriel E, des bases de l'espace dual E^*, des puissances tensorielles quelconques de E et de E^* sans avoir à expliciter les indices, rendant ainsi l'étude élégante et simple. Ensuite, nous abordons les transformations induites par un changement de bases de E sur les représentations matricielles des bases de E, des bases de E^*, des bases des produits tensoriels de E et de E^*, des composantes des vecteurs, des composantes des covecteurs, des composantes des tenseurs affines quelconques sur E.

La généralisation au cas de tenseurs quelconques (et non affines) est donnée dans la référence [3].

ABSTRACT

In the present paper goes on the study given in the references [1] *and* [2] *but under the view point of* compact formalism. *Matricial representations of* E *vector space basis, of* E^* *dual space basis, of any* E *and* E^* *tensorial power basis, are derived in a simple and elegant way without expliciting any indices. Then, transformations induced by a basis change on the matricial representation of* E *basis, of* E^* *basis, of tensorial product basis, of vector componants, of covector componants, of any affine tensor composants are tackled. The generalization to the case of any tensors (not only of affine tensors) under the view point of compact formalism is given in the reference* [3].

1. *INTRODUCTION*

Dans les articles [1] et [2] nous avons montré qu'il est possible de représenter les *tenseurs affines* d'ordre *quelconque* construits sur un espace vectoriel E sur K de dimension n (ainsi que les opérateurs multilinéaires) par des tableaux (matrices-lignes, matrices-colonnes, matrices) pour lesquels les *règles ordinaires du calcul matriciel sont applicables*, moyennant certaines conventions. Ces dernières sont les suivantes :

a) *tout* indice ou tout *ensemble d'indices* en position *inférieure* correspond à un *indice de colonne* dans la représentation matricielle. Ainsi, la base de E formée par l'ensemble de vecteurs (e_i) de E, les composantes d'un covecteur, les composantes d'un tenseur *covariant* d'ordre quelconque,... sont représentées par une *matrice-ligne*.

b) *tout* indice (ou *tout ensemble d'indices*) en position *supérieure* correspond à un *indice de ligne* dans la représentation matricielle. Ainsi, la base duale de E formée par l'ensemble des covecteurs (ϵ^j) de l'espace duale E*, les composantes d'un vecteur, les composantes d'un tenseur *contravariant* d'ordre quelconque,... sont représentées par une matrice-colonne. Ces conventions sont d'ailleurs une conséquence directe de la convention de sommation d'Einstein.

Les tenseurs mixtes (et les bases des produits tensoriels d'espaces vectoriels E et E*) dont les composantes ont des indices en positions supérieure et inférieure sont donc représentés par une matrice au sens élémentaire de ce mot. La composantes $T^{i_1 i_2 \dots i_r}_{j_1 j_2 \dots j_s}$ du tenseur mixte d'ordre r + s, s fois covariant, r fois contravariant occupe la ℓ-ième ligne et la k-ième colonne de la matrice représentative [S]. C'est donc l'élément S^{ℓ}_{k} . Nous avons les relations :

$$
(1.1) \quad \begin{cases} S^{\ell}_{k} = T^{i_1 i_2 \dots i_r}_{j_1 j_2 \dots j_s} \\ \ell = n^{r-1}(i_1 - 1) + n^{r-2}(i_2 - 1) + \dots + n^{r-k}(i_k - 1) + \dots + n(i_{r-1} - 1) + i_r \\ k = n^{s-1}(j_1 - 1) + n^{s-2}(j_2 - 1) + \dots + n^{s-k}(j_{k} - 1) + \dots + n(j_{s-1} - 1) + j_s \end{cases}
$$

où $n = \dim E = \dim E^*$.

Dans les travaux [1] et [2], nous avons considéré les composantes et les indices. Dans le présent travail, nous allons alléger le formalisme en faisant une *étude globale*. La méthode est alors plus élégante et plus simple. On s'en convaincra en faisant la comparaison. Les deux études se complètent par ailleurs.

Nous donnons la représentation matricielle des bases de E, de E* ainsi que les bases des espaces vectoriels des produits tensoriels de E et de E*, bases induites par une base de E. L'intérêt de cette représentation matricielle des bases réside dans le fait qu'elle nous permettra de faire toute l'étude en utilisant *le calcul matriciel sans expliciter les indices.*

Ensuite, nous donnons la représentation matricielle des vecteurs, des covecteurs, et des tenseurs dans la Section 3. Dans la Section 4, nous étudions le problème du changement de bases, c.à.d. nous cherchons comment se répercute de *façon matricielle en utilisant* les conventions ci-dessus un changement de bases de E sur les bases induites et sur les composantes des tenseurs.

Rappelons aussi la convention d'écriture : nous soulignons une matrice-ligne ; nous surlignons une matrice-colonne. De même, nous surlignons les vecteurs de E et soulignons les covecteurs de E*. Les deux conventions d'écriture sont cohérentes car un vecteur de E est représenté de façon bijective dans une base par une matrice-colonne tandis qu'un covecteur est représenté de façon bijective par une matrice-ligne dans une base. Nous représentons par un point le produit matriciel habituel (produit ligne-colonne).

2. *REPRESENTATION MATRICIELLE DES BASES INDUITES DANS* $E^{*\otimes p}$, $E^{\otimes p}$, *ET DE* $E^{*\otimes s} \otimes E^{\otimes r}$ *PAR UNE BASE DE* E.

Nous utilisons dans toute la suite les conventions données dans la Section 1.

Soient $(\overline{e}_i)$ pour i variant de 1 à n une base de E, et $(\underline{\epsilon}^j)$ pour j variant de 1 à n la base duale.

2.1. – Base de E.

Une base $(\overline{e}_i)$ est représentée par la matrice-ligne

$$(2.1.1) \qquad \underline{B}^* = [\overline{e}_1 \, \overline{e}_2 \, \ldots . \, \overline{e}_n]$$

2.2. – Base de E*.

La base duale $(\underline{\epsilon}^j)$ est représentée par la matrice-colonne

$$(2.2.1) \qquad \overline{B} = \begin{bmatrix} \underline{\epsilon}^1 \\ \underline{\epsilon}^2 \\ \vdots \\ \underline{\epsilon}^n \end{bmatrix},$$

Faisons les deux remarques importantes suivantes :

$$(2.2.2) \qquad \underline{B}^* . \overline{B} = \sum_{i=1}^{n} \overline{e}_j \cdot \underline{\epsilon}^j = I$$

où I est l'*opérateur-identité des opérateurs linéaires* $\mathcal{L}(E,E)$ de E.

$$(2.2.3) \qquad \overline{B}.\underline{B}^* = \begin{bmatrix} \underline{\epsilon}^1 \\ \underline{\epsilon}^2 \\ \vdots \\ \underline{\epsilon} \end{bmatrix} [\overline{e}_1 \, \overline{e}_2 \ldots . \overline{e}_n] = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} = J$$

où J est l'opérateur-identité pour les matrices (matrice identité).

2.3. – Base de $E^{\otimes r}$ induite par une base de E .

Elle est donnée par l'ensemble $(\bar{e}_{j_1} \otimes \bar{e}_{j_2} \otimes .... \otimes \bar{e}_{j_r} = \bar{e}_{j_1 j_2 .... j_r})$.

Nous utilisons les conventions du paragraphe 1 et les formules (1.1). La base est donnée par la *matrice-ligne* $\underline{D}^*$ dont la k-ième colonne est donnée à partir de $j_1 j_2 .... j_r$ en utilisant la troisième relation de (1.1).

$$(2.3.1) \qquad \underline{D}_r^* = [d_1^* \, d_2^* \, ... \, d_k^* \, ... \, d_{n^r}^*]$$

2.4. – Base de $E^{*\otimes s}$ induite par une base de E.

C'est la *matrice-colonne* $\bar{D}$ dont les éléments sont $\underline{\epsilon}^{i_1 i_2 \cdot i_s} = \underline{\epsilon}^{i_1} \otimes \underline{\epsilon}^{i_2} \otimes .... \otimes \underline{\epsilon}^{i_s}$ et dont la ℓ-ième ligne est donnée par la deuxième relation de (1.1).

$$(2.4.1) \qquad \bar{D}_s = \begin{bmatrix} d^1 \\ d^2 \\ \vdots \\ d^{n^s} \end{bmatrix}$$

2.5. – Base de $E^{*\otimes s} \otimes E^{\otimes r}$ induite par une base de E.

Elle est donnée par l'ensemble :

$$g^{j_1 j_2 .... j_s}_{i_1 i_2 .... i_r} = \underline{\epsilon}^{j_1} \otimes \underline{\epsilon}^{j_2} \otimes .... \otimes \underline{\epsilon}^{j_s} \otimes \bar{e}_{i_1} \otimes \bar{e}_{i_2} \otimes .... \otimes \bar{e}_{i_r}$$

Conformément à la relation (1.1), elle est représentée par la matrice [G] dont la ligne ℓ et la colonne k sont données par des relations analogues aux deux dernières relations de (1.1). Elle se met sous la forme :

$$(2.5.1) \qquad [G] = \bar{D}_s \cdot \underline{D}_r^*$$

où les indices s et r sont relatifs à la covariance et à la contrevariance, et $\bar{D}_s$ et $\underline{D}_r^*$ sont définis en (2.4.1) et (2.3.1)

Les produits tensoriels d'espaces vectoriels E et E^* peuvent toujours se ramener à la forme $E^{*\otimes s} \otimes E^{\otimes r}$ (il existe une bijection par exemple entre $E \otimes E^* \otimes E \otimes E \otimes E^*$ et $E^{*\otimes 2} \otimes E^{\otimes 3}$). Aussi, les places *relatives* des indices $j_1, j_2, ... j_r$ ne sont-elles pas importantes. Par exemple, il y a une bijection entre $\underline{\epsilon}^{j_1} \otimes \bar{e}_{i_1} \otimes \underline{\epsilon}^{j_2} \otimes \underline{\epsilon}^{j_3} \otimes \bar{e}_{i_2}$ et $\underline{\epsilon}^{j_1} \otimes \underline{\epsilon}^{j_2} \otimes \underline{\epsilon}^{j_3} \otimes \bar{e}_{i_1} \otimes \bar{e}_{i_2}$ ce qui permet de les identifier ; il n'y a alors aucune ambiguité de l'écrire sous la forme $g^{j_1 j_2 j_3}_{i_1 i_2}$ sans tenir compte de l'ordre de succession des indices en haut et en bas.

3. *REPRESENTATION MATRICIELLE DES VECTEURS, DES COVECTEURS ET DES TENSEURS*

Nous avons écrit les bases sous forme matricielle. Pour trouver la représentation matricielle des vecteurs, des covecteurs et des tenseurs, il suffit de les décomposer sur ces bases.

Nous avons les résultats suivants :

3.1. – Vecteur $\overline{x}$ de E.

(3.1.1) $$\overline{x} = x^i \overline{e}_i = \underline{B}^* \cdot \overline{X}$$

La base $\underline{B}^*$ établit une bijection entre le vecteur $\overline{x}$ de E et la *matrice-colonne* $\overline{X}$ formée par les composantes de x.

3.2. – Covecteur $\underline{\phi}$ de E^*

(3.2.1) $$\underline{\phi} = \phi_i \underline{\epsilon}^i = \underline{\Phi} \cdot \overline{B}$$

La base $\overline{B}$ établit une bijection entre le covecteur $\underline{\phi}$ de E^* et la matrice-ligne $\underline{\Phi}$.

3.3. – Tenseur t contravariant d'ordre r.

Pour t de $E^{\otimes r}$, nous avons en utilisant (2.3.1) :

$$t = t^{i_1 i_2 \ldots i_r} \overline{e}_{i_1 i_2 \ldots i_r} = \underline{D}^* \cdot \overline{T}$$

Le tenseur t de $E^{\otimes r}$ est représenté de façon bijective par la *matrice-colonne* $\overline{T}$ dans la base $\underline{D}^*$.

3.4. – Tenseur v covariant d'ordre s.

$$v = v_{j_1 j_2 \ldots j_s} \underline{\epsilon}^{j_1 j_2 \ldots j_s} = \underline{V} \cdot \overline{D}$$

Le tenseur v est représenté de façon bijective par la *matrice-ligne* $\underline{V}$ dans la base $\underline{D}$.

3.5. – Tenseur mixte m d'ordre $s + r$, s fois covariant, r fois contravariant.

$$m = M^{i_1 \, i_2 \ldots i_r}_{j_1 \, j_2 \ldots j_s} \underline{\epsilon}^{j_1 j_2 \ldots j_s} \otimes \overline{e}_{i_1 i_2 \ldots i_r}$$

$M^{i_1 \, i_2 \ldots i_r}_{j_1 \, j_2 \ldots j_s}$ sont les éléments de la matrice [M] conformément à la relation (1.1).

Nous avons deux possibilités pour représenter m dans la base [G] donnée au paragraphe 2.5.

La première représentation est :

(3.5.1) $$m = \mathrm{Tr}\{ [M] \cdot [G] \} = \mathrm{Tr}\{ [G] \cdot [M] \}$$

où Tr désigne la trace.

La matrice $[M] \cdot [G]$ est nécessairement carrée comme il est facile de le vérifier.

La deuxième représentation matricielle est :

(3.5.2) $$m = \underline{D}_r^* \cdot [M] \cdot \overline{D}_s$$

Le passage de (3.5.2) à (3.5.1) peut se faire à l'aide de (2.5.1).

La deuxième représentation (3.5.2) est plus intéressante pour la suite car elle met en évidence les ordres r et s et le fait que la matrice $[M]$ représente de façon bijective le tenseur mixte m dans les bases $\underline{D}_r^*$ et $\overline{D}_s$.

4. *PROBLEME DU CHANGEMENT DE BASES*

Nous allons étudier les changements induits par un changement de bases dans E. La première base de E est $(\overline{e}_j)$; la seconde $(\overline{e}_{,j})$ est reliée à la première par :

(4.01) $$\overline{e}_{,i} = s_{,i}^{j}\, \overline{e}_j$$

Nous allons exploiter les résultats précédents pour l'étude que nous nous proposons de faire.

4.1. – Ecriture matricielle de transformation pour les bases induites.

4.1.1. – Pour les bases de E.

La relation (4.01) s'écrit dans les conventions du paragraphe 1 sous la forme

(4.1.1.1) $$\underline{B}'^* = \underline{B}^* \cdot [s]$$

où $[s]$ est la matrice, nécessairement *régulière,* de changement de bases.

4.1.2. – Pour les bases de E*.

La relation

$$\underline{\epsilon}'^{j} = \sigma_i^{'j}\, \underline{\epsilon}^i \qquad \text{où} \qquad [\sigma] = [s]^{-1}$$

se met sous la forme matricielle

(4.1.2.1) $$\overline{B}' = [\sigma] \cdot \overline{B}$$

4.1.3. – Pour les bases de $E^{\otimes r}$

Nous avons :

(4.1.3.1) $\underline{D}'^{*} = \underline{D}^{*} \cdot [S]$

où [S] est la matrice formée suivant la relation (1.1) par les éléments $s'^{\,i_1}_{\,j_1} s'^{\,i_2}_{\,j_2} \ldots s'^{\,i_r}_{\,j_r}$.

en considérant les composantes de [S] (paragraphe 4.5.1 de la référence [2] la relation

(4.1.3.2) $[S] = [s]^{\otimes r}$

où $[s]^{\otimes r}$ est la puissance kroneckerienne d'ordre r de $[s]$.

4.1.4. – Pour les bases de $E^{*\otimes s}$.

Nous avons :

(4.1.4.1) $\overline{D}' = [\Sigma] \cdot \overline{D}$

où :

$$[\Sigma] = [\sigma]^{\otimes s} = [S]^{-1}$$

d'après la propriété $\{[s]^{-1}\}^{\otimes p} = \{[s]^{\otimes p}\}^{-1}$ de la puissance kroneckerienne [3].

4.1.5. – Pour les bases de $E^{*\otimes s} \otimes E^{\otimes r}$

Soient [G] la base induite par la base $\underline{B}$ de E et [G'] la base induite par la base $\underline{B}'$ de E. Il est immédiat de montrer la relation

(4.1.5) $[G'] = [\Sigma] \cdot [G] \cdot [S]$

En effet, nous avons :

$$\begin{aligned} [G'] &= \overline{D}' . \underline{D}'^{*} && \text{d'après (2.5.1)} \\ &= [\Sigma] \cdot \overline{D} . \underline{D}^{*} [S] && \text{d'après (4.1.4.1) et (4.1.3.1)} \\ &= [\Sigma] \cdot [G][S] && \text{d'après (2.5.1)} \end{aligned}$$

En revenant aux matrices $[s]$ et $[\sigma]$, nous avons

$$[G'] = [\sigma]^{\otimes s} [G][s]^{\otimes r}$$

Cette formule peut être mise sous forme de la trace du produit de matrices, mais elle est inutile pour la suite.

Nous obtenons une formule analogue à celle de la transformation d'un tenseur mixte dans un changement de bases. Ce résultat est d'ailleurs parfaitement naturel et compréhensible.

4.2. – Ecriture matricielle de la transformation pour les composantes.

4.2.1. – Pour les composantes du vecteur $\overline{x}$ de E .

Nous avons :

$$\overline{x} = \underline{B}^*.\overline{X} = \underline{B}^{*'}.\overline{X}'$$

$$= \underline{B}^*.[s].\overline{X}' \qquad \text{d'après } (4.1.1.1)$$

d'où la loi de transformation des composantes :

$$\overline{X} = [s].\overline{X}'$$

ou

$$\overline{X}' = [s]^{-1}.\overline{X} = [\sigma].\overline{X}$$

4.2.2. – Pour les composantes du covecteur ϕ de E*

$$\underline{\phi} = \underline{\Phi}.\overline{B} = \underline{\Phi}'.\overline{B}'$$

$$= \underline{\Phi}'.[\sigma].\overline{B} \qquad \text{d'après } (4.1.2.1)$$

d'où la loi de transformation des composantes :

$$\underline{\Phi} = \underline{\Phi}'.[\sigma]$$

soit

$$\underline{\Phi}' = \underline{\Phi}.[\sigma]^{-1} = \underline{\Phi}.[s]$$

4.2.3. – Pour les composantes de $\underset{\smile}{t}$ de $E^{\otimes r}$

Nous avons :

$$t = \underline{D}^*.\overline{T} = \underline{D}'^*.\overline{T}'$$

$$= \underline{D}.[S].\overline{T}' \qquad \text{d'après } (4.1.3.1)$$

d'où la loi de transformation des composantes

$$\overline{T} = [S].\overline{T}'$$

soit

$$\overline{T}' = [S]^{-1}.\overline{T} = [\Sigma]\overline{T}$$

soit

$$\overline{T}' = [\sigma]^{\otimes r}\overline{T}$$

C'est la formule donnée au paragraphe 4.5.2. de la référence [2].

4.2.4. – Pour les composantes de v de $E^{*\otimes s}$

Nous avons :

$$v = \underline{V}.\overline{D} = \underline{V}'.\overline{D}'$$
$$= \underline{V}' \cdot [\Sigma] \cdot \overline{D} \qquad \text{d'après (4.1.4.1)}$$

d'où la loi de transformation des composantes :

$$\underline{V} = \underline{V}' \cdot [\Sigma]$$

soit

$$\underline{V}' = \underline{V} [\Sigma]^{-1} = \underline{V} \cdot [S]$$

soit

$$\underline{V}' = \underline{V} \cdot [s]^{\otimes s}$$

qui est la formule établie au paragraphe 4.5.1 de la référence [2] en considérant les composantes directement sans passer par les bases.

4.2.5. – Pour les composantes de m de $E^{*\otimes s} \otimes E^{\otimes r}$.

Nous avons :

$$m = \underline{D}_r^* \cdot [M] \cdot \overline{D}_s = \underline{D}_r'^* \cdot [M'] \cdot \overline{D}_s' \qquad \text{d'après (3.5.2)}$$
$$= \underline{D}_r^* \cdot [S][M'] \cdot [\Sigma] \cdot \overline{D}_s \qquad \text{d'après (4.1.3.1) et (4.1.4.1)}$$

d'où la loi de transformation des composantes

$$[M] = [S] \cdot [M'] \cdot [\Sigma]$$

soit

$$[M'] = [S]^{-1} [M][\Sigma]^{-1} = [\Sigma][M][S]$$

soit

$$[M'] = [\sigma]^{\otimes r} \cdot [M][s]^{\otimes s}$$

C'est la formule (4.5.3.1) de la référence [2].

5. *GENERALISATION ET CONCLUSION*

Nous avons considéré les tenseurs affines sur E. Nous étendons la représentation matricielle et l'étude que nous venons de faire au cas des produits tensoriels d'espaces vectoriels différents, à celui des produits kroneckeriens et des puissances kroneckeriennes d'opérateurs dans la référence [3].

La procédure suivie ici est différente de celle adoptée dans les références [1] et [2]. Elle est plus générale en ce sens que nous n'avons pas considéré *les composantes avec leurs indices* pour obtenir la représentation matricielle. Nous insistons sur le fait que dans cette étude, nous n'avons pas eu besoin d'expliciter les matrices des composantes à cause de l'utilisation de la *représentation matricielle des bases*.

Nous avons considéré cette dernière exactement sur le même pied d'égalité que les composantes. Elle souligne alors les dualités des formules et met en évidence et éclaircit les propriétés de covariance et de contravariance. *En effet, les quantités covariantes* (composantes, tenseurs, B^* , D^*) *se transforment dans un changement de bases à l'aide de la matrice* $[\ s\ ]$ *de changement de base ou de ses puissances kroneckeriennes tandis que les quantités contravariantes* (composantes, tenseurs, B, D) *se transforment dans un changement de bases à l'aide de la matrice* $[\sigma] = [\quad]^{-1}$ *ou des puissances kroneckeriennes de* $[\sigma]$.

La procédure utilisée ici est aussi plus directe et plus élégante que celle utilisée dans les travaux [1] et [2] à cause de sa compacticité. Elle montre de façon évidente et claire les généralisations du calcul matriciel au calcul tensoriel moyennant les règles que nous avons rappelées dans l'introduction du présent travail. Les liens entre les calculs matriciel et tensoriel, les algèbres linéaire et multilinéaire utilisant la formulation intrinsèque sont ainsi mis en évidence.

Nous voyons aussi l'utilisation pratique du formalisme et son emploi à l'aide d'un ordinateur. Nous n'avons pas donné dans ce travail d'exemples concrets de calcul car nous en avons donné dans les références [1] et [2] .

* * *

APPENDICE

Formation pratique de la matrice [G] *du paragraphe* (3.5). Soit à former la matrice [M] représentant le produit tensoriel $\bar{e}_i \otimes \underline{\epsilon}^j$ pour i variant de 1 à n et j variant de 1 à m. Pour sa formation, nous écrivons la matrice-ligne $[\bar{e}_1\ \bar{e}_2 \ldots \bar{e}_n]$ et la matrice-colonne

$$\begin{bmatrix} \underline{\epsilon}^1 \\ \underline{\epsilon}^2 \\ \vdots \\ \underline{\epsilon}^n \end{bmatrix} = \bar{C}$$

et nous faison le produit tensoriel de deux matrices de la façon suivante :

$$(A.1) \qquad [\bar{e}_1\ \bar{e}_2 \ldots \bar{e}_n] \otimes C = [\bar{e}_1 . \bar{C} \quad \bar{e}_2 . \bar{C} \ \ldots \ \bar{e}_n . \bar{C}]$$

A droite, $\bar{e}_i . \bar{C}$ représente la matrice-colonne C multipliée à gauche par l'élément $\bar{e}_i$:

$$(A.2) \qquad \bar{e}_i . \bar{C} = \bar{e}_i \begin{bmatrix} \underline{\epsilon}^1 \\ \underline{\epsilon}^2 \\ \vdots \\ \underline{\epsilon}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{e}_i \otimes \underline{\epsilon}^1 \\ \bar{e}_i \otimes \underline{\epsilon}^2 \\ \vdots \\ \bar{e}_i \otimes \underline{\epsilon}^n \end{bmatrix} .$$

Puis nous enlevons dans le deuxième membre de (A.1) tous les crochets des expressions $e_i . \bar{C}$ qui apparaissent dans (A.2). Nous voyons que les indices sont *automatiquement* rangés suivant la relation (1.1) de l'Introduction comme il est facile de le vérifier.

De même pour former de façon pratique la matrice représentant le produit tensoriel $(\underline{D}^*)_{i_1 i_2} = \bar{e}_{i_1} \otimes \bar{f}_{i_2}$ pour i variant de 1 à n et i_2 variant de 1 à n, nous opérons de la même manière. Si $\underline{E}$ est la matrice-ligne $[\bar{e}_1 \bar{e}_2 \ldots \bar{e}_n]$ et $\underline{F}$ la matrice-ligne $[\bar{f}_1\ \bar{f}_2 \ldots \bar{f}_m]$, nous obtenons la matrice-ligne $\underline{D}^*$ en écrivant :

$$\begin{aligned} \underline{D}^* &= \underline{E} \otimes \underline{F} \\ &= [\bar{e}_1 . \underline{F} \quad \bar{e}_2 . \underline{F} \ldots \bar{e}_n' . \underline{F}] \\ &= [\bar{e}_1 \otimes \bar{f}_1 \quad \bar{e}_1 \otimes \bar{f}_2 \ldots \bar{e}_1 \otimes \bar{f}_m \quad \bar{e}_2 \otimes \bar{f}_1 \ \ldots \ \bar{e}_3 \otimes \bar{f}_1 \ldots \bar{e}_n \otimes \bar{f}_1 \ldots \bar{e}_n \otimes \bar{f}_m] \end{aligned}$$

De façon générale, nous utilisons le produit *tensoriel* de matrices

$$[A] \otimes [B] = \begin{bmatrix} A_1^1 [B] & A_2^1 [B] & \ldots & A_n^1 [B] \\ A_1^2 [B] & A_2^2 [B] & \ldots & A_n^2 [B] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^m\ B & A_2^m\ B & & A_n^m\ B \end{bmatrix} = \left[A_j^i [B]\right]$$

Dans l'expression de droite, A^i_j $[B]$ représente le produit de l'élément A^i_j de $[A]$ par la matrice $[B]$, puis nous enlevons les différents crochets pour obtenir la matrice globale.

Il est important de remarquer que la matrice $\left[[A]B^i_j\right]$ représente $[B] \otimes [A]$ qui est différente de $[A] \otimes [B]$. En effet, on peut montrer que la matrice représentative du produit kroneckerien $A \otimes B$ des opérateurs linéaires A et B de $\mathcal{L}(E, E)$ dans la base induite par une base de E est égale au produit tensoriel des matrices représentant A et B dans la même base de E (voir référence [3]).

* * *

BIBLIOGRAPHIE

[1] RAOELINA ANDRIAMBOLOLONA – RAMIARAMANANA D.
I. De la définition intrinsèque des tenseurs et de son utilisation pratique en calcul tensoriel. Changement de bases. Ann. de l'Univ. de Madagascar, Série Sc. Nat. et Math. N° *11* (1974), pp. 19-43.

[2] RAOELINA ANDRIAMBOLOLONA – RAMIARAMANANA D.
II. De la définition intrinsèque des tenseurs et de son utilisation pratique en calcul tensoriel. Changement de bases. Ann. de l'Univ. de Madagascar, Série Sc. Nat. et Math. N° *12* (1975), pp. 1-27.

[3] RAOELINA ANDRIAMBOLOLONA – Etude intrinsèque et représentation matricielle des produits kroneckeriens et des puissances kroneckeriennes d'opérateurs linéaires. Etude générale. Ann. Univ. Madagascar, Série Sc. Nat. et Math. N° *14* (1977) pp. 15-29.