VALEURS PROPRES
ET VECTEURS PROPRES

par RAOELINA ANDRIAMBOLOLONA

Laboratoire de Physique, BP 138
Etablissement d'Enseignement Supérieur des Sciences
Université de Madagascar
Antananarivo, Madagascar

Résumé :

Nous calculons l'inverse d'un opérateur de la forme (s**I** — A) où **s** est un scalaire, **I** l'opérateur d'identité et **A** un opérateur linéaire. Après avoir rappelé les définitions et propriétés des opérateurs Trace, Déterminant, Adj, nous posons le problème des valeurs propres et vecteurs propres.

Il est possible de donner les définitions des opérateurs donnés dans ce travail, définitions utilisant l'algèbre multilinéaire (le calcul altérné). Toutefois, l'étude que nous faisons ne demande comme connaissance que celle de l'algèbre linéaire, et dans ce but, nous avons pris comme définitions certaines des propriétés des opérateurs (c'est le cas par exemple de l'opérateur Adj du paragraphe **2.4**). De même, nous utilisons la formulation intrinsèque dans tout ce travail.

L'étude du polynôme caractéristique utilise l'algorithme de SOURIAU, qui donne comme cas particulier le théorème de CAYLEY-HAMILTON. Nous obtenons de même les formules de NEWTON, la formule de DUNCAN, le théorème de HILBERT-DIRAC.

Au problème des vecteurs propres, peut être rattachée aussi la résolvante d'un opérateur linéaire.

Ensuite, nous abordons les propriétés des vecteurs propres et du spectre des opérateurs symétriques, hermitiques, orthogonaux et unitaires.

Bien que certains des théorèmes et résultats cités ici soient classiques, les façons de les obtenir ne sont pas toutefois courantes.

Nous illustrons à l'aide de plusieurs exemples l'utilisation pratique de l'algorithme de SOURIAU, algorithme qui présente l'avantage, non seulement d'être calculable sur ordinateur, mais aussi de donner des calculs manuels simples en donnant en même temps l'inverse $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$.

Abstract:

The calculation of the inverse $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ where s is a scalar number, $\mathbf{I}$ the identity operator, $\mathbf{A}$ a linear operator is performed. After the recall of the definitions and proprieties of Spur, Determinant, Adj operators, the eigenvalue and eigenvector problem is tackled.

All operators given in the work may be defined using multilinear algebra (alternated calculus). But the present study requires the knowledge of linear algebra only. For this purpose, operators are defined by the means of some of their properties (for instance, this is the case of the operator Adj in the Section **2.4**). On equal footing, the intrinsec formulation is used throughout this work.

Characteristic polynomial is studied by the use of SOURIAU's algorithm and CAYLEY-HAMILTON's theorem is derived as a particular result. NEWTON's formula, DUNCAN's formula, HILBERT-DIRAC's theorem are also given.

The resolvante of an operator may be related to the eigenvalue problem.

Properties of eigenvectors and of the symmetric, hermitic, orthogonal, unitary operator spectrum are quoted.

Though some of the theorems and results here-quoted are classical, the ways of their derivation are not the usual ones.

Many examples illustrate the practical utilization of SOURIAU's algorithm which presents the advantage, not only to be performed by a digital computer, but only to allow simple and handy calculations and to give the calculation of the inverse $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$

1. INTRODUCTION

Le problème aux valeurs propres est important tant du point de vue pratique que du point de vue théorique.

Sur le plan théorique, il permet de calculer l'inverse d'un opérateur de la forme $(sI - A)^{-1}$ où s est un scalaire et A un opérateur linéaire. Le calcul peut être fait à l'aide d'un ordinateur (1). L'étude est très fructueuse et conduit à la décomposition en éléments simples, à l'introduction de projecteurs propres et nilpotents propres. Nous n'étudierons pas cependant ce prolongement.

Sur le plan pratique, les applications sont très variées, en Mathématiques, en Mécanique, en Electronique, en Physique théorique, en Mécanique quantique, etc.

En Mathématiques, l'étude des propriétés spectrales des opérateurs, la diagonalisation des opérateurs en sont des exemples. La méthode des valeurs propres fournit une méthode élégante pour la recherche des directions principales d'une conique, pour la réduction des formes hermitiques et quadratiques.

En Mécanique, elle peut être utilisée pour trouver les axes principaux d'inertie, pour mettre sous forme normale l'ellipsoïde d'inertie (cette dernière opération revient d'ailleurs à la réduction d'une forme quadratique).

Nous pouvons étudier les mouvements vibratoires à l'aide de la méthode des valeurs propres. Nous pouvons aussi l'utiliser pour l'étude mathématique des réseaux électriques linéaires.

Les applications en Physique théorique sont nombreuses. Signalons à titre d'exemple que la Mécanique quantique (pour ne pas dire toute la Mécanique quantique) se ramène à la recherche des valeurs propres et des vecteurs propres d'opérateurs.

En effet, prenons la formule axiomatique de la Mécanique Quantique. La première quantification consiste à faire la substitution suivante : à tout observable $G(\vec{p}, \vec{x})$ de la Mécanique classique, observable dépendant de l'impulsion $\vec{p}$ et de la position $\vec{x}$, nous faisons correspondre l'opérateur *hermitique* $G(-ih\vec{\nabla}, \vec{x})$. Nous nous donnons aussi le vecteur d'état $\Psi(\vec{x}, t)$ qui est un vecteur de l'espace vectoriel des états de HILBERT et qui est solution de l'équation de SCHRODINGER dépendant du temps t.

Les axiomes affirment :

— les seules mesures susceptibles d'être observées expérimentalement sont celles correspondant aux valeurs propres g_n de l'opérateur $G(-ih\vec{\nabla}, \vec{x})$

$$G(-ih\vec{\nabla}, \vec{x}) \mid \Phi_n(\vec{x}) > = g_n \mid \Phi_n(\vec{x}) >$$

Il faut donc chercher l'ensemble des valeurs propres, c'est-à-dire le spectre, de l'opérateur *hermitique* $G(-i\hbar\vec{\nabla}, \vec{x})$. *

— la probabilité W pour que l'observable correspondant à l'opérateur $G(-i\hbar\vec{\nabla}, \vec{x})$ prenne la valeur g_n est donnée par le module carré du produit scalaire du vecteur propre Φ_n et de $\Psi(\ ,t)$:

$$W = \| < \Phi_n \mid \Psi(., t) > \|^2$$

C'est l'interprétation physique des vecteurs propres $\Phi_n(\vec{x})$.

Nous voyons donc que le problème se ramène à la recherche des valeurs propres et des vecteurs propres d'opérateurs.

Les quelques applications que nous venons d'énumérer montrent l'importance de la recherche des valeurs et des vecteurs propres.

Mais avant d'aborder ce problème, nous allons rappeler des notions utiles pour la suite.

2. RAPPELS DE NOTIONS

Ce sont l'opérateur Trace, l'opérateur Déterminant, l'opérateur Adj. Ces trois opérateurs sont des opérateurs intrinsèques, c'est-à-dire indépendants de la base. Aussi, lors des démonstrations, quand nous considérerons des matrices représentant des opérateurs linéaires dans une base donnée, n'insisterons-nous pas sur le fait que les résultats obtenus sont intrinsèques c'est-à-dire indépendants de la base choisie.

2.1. Trace

L'opérateur Trace (symbolisé Tr)** est défini intrinsèquement comme étant l'opérateur *linéaire* qui fait correspondre à tout opérateur monôme $\bar{C}.\underline{D}$ le nombre*** $\underline{D}.\bar{C}$:

2.1.1. $\boxed{Tr\{\bar{C}.\underline{D}\} = \underline{D}.\bar{C}}$

où $\bar{C}$ est un vecteur d'un espace vectoriel F sur un corps K, $\underline{D}$ un covecteur de l'espace vectoriel E sur K (donc appartenant à l'espace dual E*). L'opérateur Tr est donc une application *linéaire* de $F \otimes E^*$ dans le corps K.

* La propriété d'hermiticité de $G(-i\hbar\vec{\nabla}, \vec{x})$ est introduite de façon à obtenir des *valeurs propres* g_n *réelles* (paragraphe 12), et permettre une interprétation physique immédiate. La réalité des éléments de la matrice représentative de l'opérateur n'est pas suffisante. En effet, une matrice *réelle* peut avoir (et a souvent) des *valeurs propres complexes* (voir exemple 1 du paragraphe 9).

** En anglais, on l'appelle parfois Spur (symbole Sp).

*** L'opérateur linéaire monôme $\bar{C}.\underline{D}$ est l'opérateur tel que $\bar{C}$ est un vecteur (ou contravecteur) de F et $\underline{D}$ un covecteur (ou forme linéaire), élément de l'espace dual

Il y a une définition de la trace utilisant le calcul alterné.

Nous considérerons à partir de maintenant le cas où F = E. (Cette condition n'est pas cependant une condition restrictive).

Théorème. *Soient $(\bar{e}_i)$ et $(\underline{\varepsilon}^i)$ une base de l'espace vectoriel E de dimension* n *et sa base duale. L'opérateur identité I_E sur E peut se décomposer en produits d'opérateurs monômes (ou produits dyadiques).*

2.1.2. $$\boxed{I_E = \sum_{i=1}^{n} \bar{e}_i \bullet \underline{\varepsilon}^i}$$

Démonstration :

Pour tout $\bar{X}$ appartenant à E, calculons

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \bar{e}_i \bullet \underline{\varepsilon}^i\right)(\bar{X}) = \sum_{i=1}^{n} \bar{e}_i \,.\, \underline{\varepsilon}^i (\bar{X})$$

Or par définition, le nombre $\underline{\varepsilon}^i(\bar{X})$ est la composante X^i du vecteur $\bar{X}$.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \bar{e}_i \circ \underline{\varepsilon}^i\right)(\bar{X}) = \sum \bar{e}_i X^i = \bar{X}$$ CQFD

Théorème. *Soient $(\bar{e}_i)$ une base de E et $(\underline{\varepsilon}^j)$ la base duale.*

2.1.3. $\mathrm{Tr}\{\bar{e}_i \bullet \underline{\varepsilon}^j\} = \delta^j_i$

où δ^j_i est le symbole de KRONECKER.

Démonstration

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\{\bar{e}_i \bullet \underline{\varepsilon}^j\} &= \underline{\varepsilon}^j (\bar{e}_i) && \text{par définition de la trace} \\ &= \delta^j_i && \text{par définition de la base duale.} \end{aligned}$$

---

de E. Il s'introduit de la façon suivante : Soient E et F deux espaces vectoriels, $\underline{D}$ un convecteur de E (appartenant donc à l'espace dual E*) et C un vecteur de F. Pour tout X ∈ E, nous avons :

$$s = \underline{D}\,(\bar{X}) \in K$$
$$\bar{C}(s) = \bar{C}(\underline{D}.X) = (\bar{C}.\underline{D})\,(\bar{X})$$

C(s) ∈ F et $\bar{X}$ ∈ E. L'opérateur $(\bar{C}.\underline{D})$ applique E dans F. C'est un opérateur linéaire car c'est un produit d'opérateurs linéaires. On désigne parfois l'opérateur monôme par *opérateur dyadique* ou *dyade.*

Théorème. *Etant donné un opérateur linéaire A de E, le nombre Tr$\{A\}$ est égal à la somme des éléments diagonaux de la matrice représentant A dans une base donnée.*

2.1.4. $$\mathrm{Tr}\,\{A\} = \sum_{i=1}^{n} A_i^i$$

Démonstration :

Introduisons la décomposition de l'opérateur identité en produits d'opérateurs monômes (**2.1.2.**)

$$A = (\sum_{j} \vec{e}_j \otimes \underline{\varepsilon}^j)\, A\, (\sum_{i} \vec{e}_i \otimes \underline{\varepsilon}^i)$$

Utilisons l'associativité du produit des opérateurs :

$$A = \sum_{j,\, i} \vec{e}_j \otimes (\underline{\varepsilon}^j\, A\, \vec{e}_i) \otimes \underline{\varepsilon}^i$$

$\underline{\varepsilon}^j\, A\, \vec{e}_i$ est l'élément A_i^j de la matrice [A] représentant l'opérateur A dans la base $(\vec{e}_i)$. *

$$A = A_i^j\, \vec{e}_j \otimes \underline{\varepsilon}^i$$

$$\mathrm{Tr}\{A\} = \mathrm{Tr}\{A_i^j\, \vec{e}_j \otimes \underline{\varepsilon}^i\}$$

$$= A_i^j\, \mathrm{Tr}\{\vec{e}^j \otimes \underline{\varepsilon}^i\}$$

à cause de la linéarité de Tr

$$= A_i^j\, \delta_j^i$$

d'après **2.1.3**.

$$= \sum_{i=1}^{n} A_i^i \qquad \text{CQFD}$$

Théorème. *Tr est un opérateur commutatif.*

2.1.5. $$\mathrm{Tr}\{A.B\} = \mathrm{Tr}\{B.A\}$$

La démonstration ne présente pas de difficulté ; il suffit d'utiliser la décomposition **2.1.2.**.

---

* Nécessairement, la matrice A est carrée car dim E = dim E*.

Remarquons que A.B et B.A peuvent opérer sur des espaces différents.

Théorème. *La Trace est invariante par permutation circulaire.*

2.1.6. $\mathrm{Tr}\{ABC\} = \mathrm{Tr}\{BCA\} = \mathrm{Tr}\{CAB\}$

La démonstration utilise l'associativité du produit d'opérateurs et la propriété de commutativité de la Trace.

2.2. Déterminants

La définition intrinsèque du déterminant utilise le calcul alterné (opérateur multilinéaire alterné). Nous n'allons pas démontrer les propriétés mais nous nous contenterons de les rappeler (sans démonstration d'ailleurs).

2.2.1. $\text{dét}(sI_E) = s^n$ où $s \in K$ et n étant la dimension de E.

2.2.2. $\text{dét}(A.B) = \text{dét}(A).\text{dét}(B)$

2.2.3. $\text{dét}(\prod_{i=1}^{n} A_i) = \prod_{i=1}^{n} (\text{dét } A_i)$ où $\prod_{i=1}^{n}$ désigne le produit de 1 à n.

2.2.4. $\text{dét}(A^P) = [\text{dét}(A)]^P$

2.2.5. $\text{dét}(sA) = s^n \text{ dét}(A)$ où $n = \mathit{dim}$. Déf (A)

2.2.6. $\text{dét}(-A) = (-1)^n \text{ dét}(A)$

La condition nécessaire et suffisante pour que A soit régulier est que dét A soit différent de 0.

2.2.7. $\exists\, A^{-1} \Longleftrightarrow \text{dét}(A) \neq 0$

2.2.8. $\text{dét}(A^{-1}) = \dfrac{1}{\text{dét}(A)}$

2.3. Rappels sur les polynômes scalaires, vectoriels et opérateurs.

Rappelons quelques théorèmes utiles sur les polynômes scalaires, vectoriels et opérateurs.

Un polynôme *vectoriel* de degré *n est un opérateur P* tel que :

$$P(s) = \sum_{j=0}^{n} s^j \overline{X}_{n-j}$$

où s est un scalaire et les $\vec{X}_j$ sont des vecteurs d'un espace vectoriel E.

A partir d'un polynôme *scalaire*, il est possible de définir un *polynôme d'opérateur* en remplaçant la variable scalaire par un opérateur. En particulier, on définit un opérateur linéaire *algébrique* A par l'existence d'

2.3.1. un polynôme non nul P tel que P(A) = 0.
Les notions de degré, de coefficients d'un polynôme, de polynôme nul sont les mêmes que celles d'un polynôme scalaire *mutatis mutandis*.
Citons quelques théorèmes classiques utiles.

2.3.2. **Théorème.** *Pour qu'un polynôme P s'annule pour une infinité de valeurs de la variable, il faut et il suffit que tous ses coefficients soient nuls.*

2.3.3. **Théorème.** *Si deux polynômes en* s *sont égaux* quelles que soient *les valeurs de la variable* s *(polynômes* identiques*) leurs coefficients sont égaux.*
Ce théorème permet l'identification des coefficients de *même* puissance de s de deux polynômes P(s) et Q(s) quand nous avons :

$$P(s) = Q(s) \text{ pour tout } s.$$

Du **théorème d'Alembert :** *Un polynôme* scalaire *d'une variable* complexe *de degré supérieur ou égal à 1 admet au moins une racine,*
nous pouvons déduire que :

2.3.4. **Théorème.** *Un polynôme scalaire de degré* n *admet* n *racines.*

Remarquons que ces racines peuvent être *complexes* même si le polynôme scalaire est à coefficients réels (par exemple, c'est le cas des racines du trinôme du second degré à coefficients réels quand le discriminant est négatif).

Cette remarque est importante car nous serons obligés de prolonger dans l'espace vectoriel complexe quand nous chercherons les valeurs propres d'un opérateur. En effet, une matrice à *éléments réels* peut avoir des valeurs propres *complexes* (voir paragraphe 9).

2.3.5. **Théorème.** *Un polynôme scalaire P d'une variable scalaire s et de degré n peut se mettre de* façon unique *sous la forme :*

$$P(s) = a_n (s - s_1)(s - s_2) \ldots (s - s_n)$$

où a_n est le coefficient de s^n dans $P(s)$
et les s_j ($j = 1, \ldots, n$) sont les n racines de $P(s) = 0$.

2.4. Opérateur Adj.

2.4.1. *Définition de Adj*

Nous allons définir l'opérateur Adj.

Soit A un opérateur linéaire *régulier* de E. A partir de A, nous définissons Adj(A) par la relation :

$$\boxed{A^{-1} = \frac{\mathrm{Adj}(A)}{\mathrm{dét}(A)}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\mathrm{Adj}(A) = [\mathrm{dét}(A)]\, A^{-1}}$$

Il existe une définition utilisant le calcul alterné [1]. Mais nous préférons prendre cette propriété intrinsèque comme définition car ce sont les propriétés qui découlent de cette relation dont nous aurons besoin par la suite.

Propriétés

2.4.2. $\boxed{\mathrm{Adj}(s\, A) = s^{n-1}\, \mathrm{Adj}\, (A)}$ n étant la dimension de E. s un scalaire non nul

Démonstration.

$$\begin{aligned}\mathrm{Adj}(sA) &= \mathrm{dét}(sA)\ (sA)^{-1} \\ &= s^n\, \mathrm{dét}(A)\, \frac{A^{-1}}{s} && \text{(à cause de } \mathbf{2.2.5.}) \\ &= s^{n-1}\, [\mathrm{dét}(A)]\, A^{-1} \\ &= s^{n-1}\, \mathrm{Adj}(A) && \text{CQFD.}\end{aligned}$$

Remarque :

L'opérateur Adj n'est donc pas en général un opérateur linéaire sur l'espace vectoriel des opérateurs linéaires de E, sauf pour $n = 2$.

Pour $n = 2$, nous trouvons à partir de la définition :

$$\mathrm{Adj}(A) = \mathrm{Tr}(A).I - A$$

Dans ce cas, Adj est un opérateur linéaire car c'est une combinaison linéaire de deux opérateurs linéaires Tr et A.

Dans le cas de $n > 2$, remarquons que *Adj* A, *quant à lui, proportionnel* . *l'inverse d'un* opérateur linéaire, est un opérateur linéaire* sur E.

2.4.3. $$\boxed{\mathrm{Adj}(-A) = (-1)^{n-1}\,\mathrm{Adj}(A)}$$

Démonstration :

Il suffit de poser $s = -1$ dans la relation **2.4.2.**

2.4.4. $$\boxed{\mathrm{dét}[\mathrm{Adj}(A)] = [\mathrm{dét}(A)]^{n-1}}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} \mathrm{dét}[\mathrm{Adj}(A)] &= \mathrm{dét}\,[A^{-1}\,\mathrm{dét}(A)] & \\ &= [\mathrm{dét}\,A]^n.\mathrm{dét}(A^{-1}) & \text{à cause de la relation } \mathbf{2.2.5} \\ &= [\mathrm{dét}(A)]^{n-1} & \text{à cause de la relation } \mathbf{2.2.8.} \end{aligned}$$

CQFD.

Nous avons le corollaire : comme A est nécessairement régulier, Adj A est régulier.

2.4.5. $$\boxed{\mathrm{Tr}[\mathrm{Adj}(A)] = \sum_{i=1}^{n}{}' \, s_1 s_2 \dots \cancel{s_i} \dots s_n}$$

* En effet, pour tout λ et μ de K et tout x et y de E et par définition (**2.4.1**) de l'opérateur Adj A, nous avons :

$$\begin{aligned} \lambda\,(\mathrm{Adj}\ A)\,(x) + \mu\,(\mathrm{Adj}\ A)\,y &= \lambda\,(\mathrm{dét}\ A)\,A^{-1}x + \mu\,(\mathrm{dét}\ A)\,A^{-1}y \\ &= (\mathrm{dét}\ A)\,(A^{-1})\,(\lambda x + \mu y) \\ &= (\mathrm{Adj}\ A)\,(\lambda x + \mu y) \end{aligned}$$

CQFD.

où les s_i pour $i = (1, \dots n)$ sont les valeurs propres de A et $\sum_{j=1}^{n}{}'$ est la somme des produits $(s_1\ s_2 \dots \cancel{s_j} \dots s_n)$ des n valeurs propres et dans esquels nous supprimons chaque fois le terme s_i (pour j variant de 1 à n).

Démonstration

Nous donnerons la démonstration dans le paragraphe **3.*e*.**

Remarques

a. Le calcul pratique de Adj(A) peut être fait en utilisant les formules de CRAMER Les éléments de Adj(A) sont les différents cofacteurs obtenus à partir de dét(A). En fait, nous pouvons utiliser l'expression de Adj(A) pour le calcul de l'inverse de A. En effet, nous donnerons au paragraphe 5. d'autres possibilités de calculs de l'expression de Adj(A). La matrice représentant Adj(A) est désignée parfois par la *matrice complémentaire* de la matrice [A].[2] ;

b. Il ne faut pas confondre l'opérateur Adj et l'opérateur adjoint hermitique. L'adjoint hermitique (ou le conjugué hermitique) d'une matrice $[A^i_j]$ est la matrice d'élément $[A]^{*i}_j = \bar{A}^i_j$ où la barre signifie la conjugaison complexe.

3. POSITION DU PROBLÈME AUX VALEURS PROPRES

Soit A un opérateur linéaire quelconque de E.

Première définition

Il faut chercher les vecteurs $\bar{X}_j \neq \bar{0}_E$ de E et le nombre complexe s_j tel que :

$$A\bar{X}_j = s_j \bar{X}_j$$

Deuxième définition équivalente à la première.

Il faut chercher les solutions non nulles $\bar{X}_j$ de E tel que :

3.1. $$\boxed{(s_j I - A)\ \bar{X}_j = \bar{0}_E}$$

Remarques :

a. $\bar{X}_j$ est appelé le *vecteur propre* de A correspondant à la *valeur propre* s_j. L'inverse s_j^{-1} de la valeur propre est appelé *valeur caractéristique* de A.

Signalons que des auteurs appellent valeur caractéristique ce que nous appelons valeur propre et vice versa.
Dans tout ce qui suit, nous gardons les premières dénominations car ce sont celles les plus couramment utilisées.
L'ensemble des valeurs propres de A forme le *spectre* de A.
Nous pouvons chercher la décomposition spectrale et les éléments spectraux, mais nous ne les étudierons pas ici ;

b. Si l'une *au moins* des valeurs propres *est nulle,* par exemple s_1, nous avons :

$$A\overline{X}_1 = 0$$

avec $\overline{X}_1 \neq \overset{E}{0}$. L'opérateur A est donc par définition *singulier.*
Aussi, un opérateur singulier admet la valeur 0 comme valeur propre et réciproquement ;

c. Si A est régulier et a pour vecteur propre $\overline{X}_j$ avec la valeur propre s_j, $\overline{X}_j$ est vecteur propre de A^{-1} avec la valeur propre s^{-1}.
En effet, soit :

$$A\overline{X}_j = s_j\overline{X}_j$$

Multiplions à gauche par A^{-1} et divisons par s_j qui est nécessairement non nul :

3.2. $$\frac{1}{s_j}\overline{X}_j = A^{-1}\overline{X}_j \qquad \text{CQFD}$$

Le spectre de A^{-1} est l'ensemble (s_j^{-1}) ;

d. Nous admettrons que, si nous prenons comme base les *n* vecteurs propres de A, l'opérateur A est représenté par une matrice diagonale* dans cette base, d'où :

3.3. $$\boxed{\text{dét}(A) = s_1.s_2.s_3 \ldots s_n}$$

e. Avant de démontrer la relation **2.4.5**, calculons

3.4. $$\mathrm{Tr}(A^{-1}) = \frac{\sum' s_1.s_2 \ldots \cancel{s_j} \ldots s_{n-1}.s_n}{\text{dét}(A)}$$

pour A régulier.

Démonstration :

A est régulier, donc aucune des valeurs propres s_j n'est nulle. Nous rapportons A à la base formée par les *n* vecteurs propres. A est mise sous forme diagonale, de même A^{-1}.

* Dans le cas le plus général, un opérateur A non diagonisable peut être mis sous la « forme de Jordan ».

D'après la propriété **2.1.4** de la trace, nous avons :

$$\mathrm{Tr}(A^{-1}) = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} + \ldots + \frac{1}{s_j} + \ldots + \frac{1}{s_n}$$

$$= \frac{\not{s}_1 s_2 s_3 \ldots s_n + s_1 \not{s}_2 s_3 \ldots s_n + \ldots + s_1 s_2 \ldots s_{n-1} \not{s}_n}{s_1 s_2 s_3 \ldots s_n}$$

$$= \frac{\sum\limits_{j=1}^{n}{}' \; s_1 \, s_2 \ldots \not{s}_j \ldots s_n}{\text{dét}(A)} \qquad \text{CQFD}$$

où $\sum\limits_{j=1}^{n}{}'$ a été défini dans la formule **2.4.5.**

La demonstration de la formule **2.4.5** est maintenant immédiate.

$$\mathrm{Tr}\,(\mathrm{Adj}(A)) = \mathrm{Tr}\,(A^{-1}\,\text{dét}(A))$$

$$= \text{dét}(A).\mathrm{Tr}(A^{-1}) \qquad \text{(linéarité de Tr)}$$

$$= \frac{\text{dét}(A) \sum' \; s_1 s_2 \ldots \not{s}_j \ldots s_n}{\text{dét}(A)} \qquad \text{(formule 3.4)}$$

$$= \sum{}' s_1 \; s_2 \ldots \not{s}_j \ldots s_n \qquad \text{CQFD}$$

4. POLYNOMES CARACTÉRISTIQUES

Pour que s_i soit une valeur propre de A, il faut et il suffit d'après **3.1** que l'opérateur linéaire $(s_j\, I - A)$ soit singulier.

Le nombre s_j est valeur propre de A si et seulement si :

4.1. $\qquad \text{dét}(s_j\, I - A) = 0$

Cette équation s'appelle « équation aux valeurs propres » de A. Quelquefois, on utilise la dénomination « équation caractéristique* », ou « équation séculaire ».

Cherchons la nature du premier membre. Posons :

4.2. $\qquad P(s) = \text{dét}(sI - A)$

* Cette appellation correspond à celle dans laquelle valeur propre est désignée par valeur caractéristique. « Equation séculaire » a été utilisée en mécanique.

Dans une base de E, $(sI - A)$ est représenté par une matrice $n \times n$. $\text{dét}(sI - A) = P(s)$ est donc un *polynôme en* s *de degré* **n**. On l'appelle *polynôme caractéristique de A.* **

Nous pouvons écrire :

4.3. $$\text{dét}(sI - A) = P(s) = s^n + k_1 s_n^{-1} + \ldots + k_{n-1}s + k_n$$

Evidemment, le coefficient de s^n est égal à 1.

Nous allons chercher les expressions de quelques coefficients de $P(s)$ en fonction de A. Pour cela, faisons intervenir la décomposition en produit de facteurs $(s - s_j)$ où s_j sont les racines de $P(s)$, *i.e.* les valeurs propres de A.

4.4. $$P(s) = (s - s_1)(s - s_2) \ldots (s - s_n)$$

En développant **4.4** et par comparaison avec **4.3**, nous obtenons les relations suivantes pour les coefficients.

4.5.
$$\begin{cases} k_1 = -(s_1 + s_2 + \ldots + s_n) \\ k_2 = \sum\limits_{j \neq k} s_j s_k \\ \ldots\ldots\ \ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ k_{n-1} = (-1)^{n-1} \sum\limits_{j=1}^{n}{}' s_1 s_2 \ldots \cancel{s_j} \ldots s_{n+1} s_n \\ k_n = (-1)^n s_1 s_2 \ldots s_n \end{cases}$$

Les coefficients k_j sont les fonctions élémentaires symétriques des racines s_j. Par définition de $P(s)$, ils ne dépendent que de A.

Utilisons les relations **2.1.4**, **2.2.6**, **2.4.3**, **2.4.5**, **3.3**, pour écrire k_1, k_{n-1} et k_n sous forme intrinsèque :

4.6. $k_1 = \text{Tr}(-A)$

4.7 $k_{n-1} = \text{Tr}\,[\text{Adj}(-A)]$

4.8. $k_n = \text{dét}(-A)$

La relation **4.8** est évidente en remarquant $k_n = P(O)$.

** Nous gardons cette dénomination bien qu'elle ne soit pas nomogène avec la nôtre. En effet, il faudrait appeler $P(s)$ « polynôme aux valeurs propres » car $P(s_j) = 0$ est l'équation aux valeurs propres.

De même, en dérivant la relation **4.3**, et à partir de **4.7**, nous obtenons :

4.9. $$\boxed{k_{n-1} = \left(\frac{dP}{ds}\right)_{s\,=\,o} = \text{Tr}\,[\text{Adj}(-\,\text{A})]}$$

La relation **4.9** peut être encore prolongée analytiquement pour tout s

4.10 $$\boxed{\frac{dP}{ds} = \text{Tr}\,[\text{Adj}(s\text{I} - \text{A})]}$$

Démonstration

Considérons l'opérateur $A_0 = A - s_0 I$ où s_0 est un nombre quelconque. Le polynôme caractéristique $P_0(s)$ de A_0 est :

$$P_0(s) = P_0(sI - A_0) = \text{dét}(sI - A_0) = \text{dét}[(s+s_0)I - A] = P(s + s_0)$$

L'utilisation de la formule de TAYLOR donne :

$$P_0(s) = P(s_0) + \frac{s}{1!} \quad P'(s_0) + \quad \frac{s^2}{2!} \quad P''(s_0) + \ldots + \quad \frac{s^n}{n!}\,P^n\,(s_0)$$

Le coefficient du terme en s est $P'(s_0) = \left(\frac{dP}{ds}\right)_{s_0}$

et est égal à $\text{Tr}[\text{Adj}(-\,A_0)]$ d'après la relation **4.7**.

$$\text{Tr}[\text{Adj}\,(s_0I - A)] = \left(\frac{dP}{ds}\right)_{s_0} \qquad \text{pour tout } s_0$$

d'où

$$\text{Tr}[\text{Adj}(sI - A)] = \frac{dP}{ds} \qquad \text{pour tout } s$$

CQFD

5. CALCUL DE $(sI - A)^{-1}$. FORMULES DE SOURIAU. FORMULE DE CAYLEY-HAMILTON

Si s est différent de la valeur propre de A, $sI - A$ est régulier. Nous allons calculer l'inverse $(sI - A)^{-1}$

Nous allons utiliser la définition de l'opérateur Adj (paragraphe **2.4**) :

5.01. $$(sI - A)^{-1} = \frac{\text{Adj}\,(sI - A)}{\text{dét}(sI - A)}$$

Posons :

5.02. $\mathrm{Adj}(sI - A) \equiv Q(s)$

Nous avons au dénominateur le polynôme caractéristique P(s) de A (formule **4.2**)

5.03 $\mathrm{d\acute{e}t}(sI - A) \equiv P(s)$

5.04. $(sI - A)^{-1} = \dfrac{Q(s)}{P(s)}$

5.1. Théorème. *$Q(s) \equiv \mathrm{Adj}(sI - A)$ est un polynôme de degré $(n - 1)$ au plus dont les coefficients B_j sont des opérateurs linéaires de E. Nous avons :*

5.1.1. $Q(s) = \mathrm{Adj}(sI - A) \equiv s^{n-1}B_0 + s^{n-2}B_1 + \ldots + sB_{n-2} + B_{n-1}$

Démonstration :

Comme :

$$P(s)I = Q(s)\ (sI - A)$$

est de degré n en s et $(sI - A)$ du premier degré en s, nous voyons que $Q(s)$ est au plus de degré $(n - 1)$ et que ses coefficients sont des opérateurs linéaires de E.

Nous allons chercher les relations entre les coefficients B_j, k_j et A.

5.2. Formules de SOURIAU

Nous avons trois groupes de formules qui permettront de calculer $\mathrm{Adj}(sI - A) \equiv Q(s)$ en fonction de $P(s) \equiv \mathrm{d\acute{e}t}\ (sI - A)$ (et inversement) (relations de SOURIAU). Ils donnent comme cas particulier la formule de CAYLEY-HAMILTON.

Nous avons les relations suivantes entre les coefficients de l'opérateur $\mathrm{Adj}(sI - A) = Q(s)$ et ceux du polynôme caractéristique $P(s) = \mathrm{d\acute{e}t}(sI - A)$.

5.2.1. *Premier groupe de relations.*

$$\begin{cases} B_0 = I \\ B_1 = B_0.A + k_1 I \\ B_2 = B_1.A + k_2 I \\ \dots\dots\dots\dots \\ B_j = B_{j-1}.A + k_j I \\ \dots\dots\dots\dots \\ B_{n-1} = B_{n-2}.A + k_{n-1} I \\ 0 = B_{n-1}.A + k_n I \end{cases}$$

Démonstration :

De la définition **2.4.1** de Adj, nous avons :

$$\mathrm{Adj}(A).A = \mathrm{dét}(A).I$$

ou en remplaçant A par (sI — A)

$$\mathrm{Adj}(sI - A).(sI - A) = \mathrm{dét}(sI - A).I$$

soit :

$$Q(s)\ (sI - A) = P(s)I$$

soit :

$$[s^{n-1}B_0 + s^{n-2}B_1 + \dots + sB_{n-2} + B_{n-1}]\ [sI - A] =$$
$$[s^n + s^{n-1}k_1 + \dots + s\,k_{n-1} + k_n].I$$

Nous avons une identité en s. Conformément au théorème **2.3.3**, nous pouvons égaliser les coefficients des mêmes puissances de s dans les deux membres.

Coefficient de s^n	:	$B_0 = I$
Coefficient de s^{n-1}	:	$B_1 - B_0A = k_1 I$
Coefficient de s^{n-2}	:	$B_2 - B_1A = k_2 I$
. . . .		. . . .
Coefficient de s^{n-j}	:	$B_j - B_{j-1}A = k_j I$
. . . .		. . . .
Coefficient de s.	:	$B_{n-1} - B_{n-2}.A = k_{n-1} I$
Terme constant en s		$-B_{n-1}A = k_n I$

Nous faisons passer dans le second membre les seconds termes du premier membre, et nous obtenons les relations **5.2.1**.

5.2.2. *Deuxième groupe de relations*

$$\begin{cases} k_1 = -\,\mathrm{Tr}(B_0.A) = -\,\mathrm{Tr}(A) \\ k_2 = -\dfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(B_1.A) \\ k_3 = -\dfrac{1}{3}\,\mathrm{Tr}(B_2.A) \\ \dots\dots\dots\dots \\ k_j = -\dfrac{1}{j}\,\mathrm{Tr}(B_{j-1}.A) \\ \dots\dots\dots\dots \\ k_n = -\dfrac{1}{n}\,\mathrm{Tr}(B_{n-1}.A) \end{cases}$$

Démonstration :

A partir de l'identité **4.10**

$$\mathrm{Tr}[\mathrm{Adj}(sI - A)] = \frac{dP}{ds}$$

soit :

$$\mathrm{Tr}[Q(s)] = \frac{dP}{ds}$$

nous obtenons :

$$\mathrm{Tr}(s^{n-1}B_0 + s^{n-2}B_1 + \dots + sB_{n-2} + B_{n-1}) =$$
$$ns^{n-1} + (n-1)k_1s^{n-2} + \dots + k_{n-1}$$

Nous identifions terme à terme (théorème **2.3.3**) :

5.2.2.a.

$$\begin{cases} \mathrm{Tr}(B_0) = n \\ \mathrm{Tr}(B_1) = (n-1)k_1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \mathrm{Tr}(B_j) = (n-j)k_j \\ \dots\dots\dots\dots \\ \mathrm{Tr}(B_{n-1}) = k_{n-1} \end{cases}$$

Rappelons que Tr $(sI) = sn$.

Les premiers de ce groupe de relations peuvent être calculés.

Calculons en effet les traces des deux membres du premier groupe de relations **5.2.1**.

5.2.2.*b*.

$$\begin{cases} \mathrm{Tr}(B_0) = n \\ \mathrm{Tr}(B_1) = \mathrm{Tr}(B_0.A) + nk_1 \\ \mathrm{Tr}(B_2) = \mathrm{Tr}(B_1.A) + nk_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \mathrm{Tr}(B_j) = \mathrm{Tr}(B_{j-1}.A) + nk_j \\ \mathrm{Tr}(B_{n-1}) = \mathrm{Tr}(B_{n-2}.A) + nk_{n-1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0 = \mathrm{Tr}(B_{n-1}.A) + nk_n \end{cases}$$

De la comparaison des deux groupes de relations **5.2.2.*a*** et **5.2.2.*b***, nous obtenons :

5.2.2.*c*.

$$\begin{cases} (n - 1)k_1 = \mathrm{Tr}(B_0.A) + nk_1 \\ (n - 2)k_2 = \mathrm{Tr}(B_1.A) + nk_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ (n - j)k_j = \mathrm{Tr}(B_{j-1}.A) + nk_j \\ \dots\dots\dots\dots \\ k_{n-1} = \mathrm{Tr}(B_{n-2}.A) + nk_{n-1} \\ 0 = \mathrm{Tr}(B_{n-1}.A) + nk_n \end{cases}$$

Le groupement des k_j dans les premiers membres donne immédiatement la relation **5.2.2.**

Si nous résumons les deux résultats, nous avons l'algorithme de SOURIAU.

Soient :

$$P(s) = \mathrm{dét}(sI - A) = s^n + k_1 s^{n-1} + \dots + k_n$$

$$Q(s) = \mathrm{Adj}(sI - A) = s^{n-1} I + s^{n-2} B_1 + \dots + B_{n-1}$$

Les coefficients k_j et B_j se calculent suivant les formules :

5.2.2.d.

$$\begin{cases} k_1 = -\mathrm{Tr}(A) \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots B_1 = A + k_1 I \\ k_2 = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(B_1.A) \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots B_2 = B_1A + k_2 I \\ k_3 = -\frac{1}{3}\mathrm{Tr}(B_2.A) \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots B_{n-1} = B_{n-2}.A + k_{n-1} I \\ k_n = -\frac{1}{n}\mathrm{Tr}(B_{n-1}.A) \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots 0 = B_{n-1}A + k_n I \end{cases}$$

5.2.3. *Troisième groupe de relations*

Les coefficients B_j de $\mathrm{Adj}(sI - A) = Q(s)$ sont des *polynômes en A de degré* j [pour $j \leqslant (n - 1)$] dont les coefficients sont les coefficients k_i $(i \leqslant j)$ de $P(s) = \text{dét.}(sI - A)$.

$$\begin{cases} B_0 = I \\ B_1 = A + k_1 I \\ B_2 = A^2 + k_1 A + k_2 I \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ B_{n-2} = A^{n-2} + k_1 A^{n-3} + k_2 A^{n-4} + \ldots + k_{n-3}A + k_{n-2} I \\ B_{n-1} = A^{n-1} + k_1 A^{n-2} + \ldots \qquad + k_{n-2}A + k_{n-2} I \\ O = A^n + k_1 A^{n-1} + \ldots \quad + k_{n-1}A + k_n I \end{cases}$$

Démonstration :

Du premier groupe de relation **5.2.1**, nous substituons B_0 dans B_1, puis B_1 dans B_2, puis B_2 dans B_3, et ainsi de suite. Nous obtenons les relations désirées.

$$\begin{cases} B_0 = I \\ B_1 = A + k_1 I \\ B_2 = (A + k_1 I).A + k_2 I = A^2 + k_1 A + k_2 I \\ B_3 = (A^2 + k_1 A + k_2 I).A + k_3 I = A^3 + k_1 A^2 + k_2 A + k_3 I \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Conséquence :

Les B_j étant des polynômes en A commutent donc avec A. En particulier, Q(s) donc Adj(sI — A) commute avec A. Nous avons même pour l'opérateur Adj la propriété de commutation :

$$A.\mathrm{Adj}(A) = \mathrm{Adj}(A).A = I.\mathrm{dét}(A)$$

5.2.4. *Formule de CAYLEY-HAMILTON*

La dernière relation de **5.2.3** est la formule de CAYLEY-HAMILTON.

Théorème de CAYLEY-HAMILTON. *Tout opérateur linéaire A d'un espace vectoriel E de dimension finie sur K annule son polynôme caractéristique :*

$$\mathrm{dét}(sI - A) \equiv P(s) = s^n + k_1 s^{n-1} + \dots + k_{n-1} A + k_n$$

$$P(A) = A^n + k_1 A^{n-1} + \dots + k_{n-1} A + k_n I = 0$$

5.2.5. *Calcul de $Tr(B_j)$*

$$\boxed{\mathrm{Tr}(B_j) = (n - j)k_j} \qquad j = (1, \dots, n - 1)$$

Démonstration :

Prenons la trace des B_j dans la seconde partie des formules **5.2.2.*d***.

$$\mathrm{Tr}(B_j) = \mathrm{Tr}(B_{j-1}.A + k_j I) \qquad j = (1, \dots, n - 1)$$
$$= \mathrm{Tr}(B_{j-1}.A) + nk_j$$

Or nous avons dans la première partie des relations **5.2.2.*d*** :

$$k_j = -\frac{1}{j} \mathrm{Tr}(B_{j-1}.A)$$

d'où :

$$\mathrm{Tr}(B_{j-1}.A) = - jk_j$$

que nous portons dans le second membre de $\mathrm{Tr}(B_j)$. Nous obtenons :

$$\boxed{\mathrm{Tr}(B_j) = (- j + n)k_j} \qquad \text{CQFD}$$

Remarque :

Nous pouvons obtenir directement cette relation à partir de la relation **4.10** :

$$\frac{dP}{ds} = \mathrm{Tr}[\mathrm{Adj}(sI - A)]$$

Nous pouvons de même l'utiliser pour démontrer cette dernière sans utiliser le développement de TAYLOR que nous avons employé au paragraphe **4**.

En effet, nous avons par **définition**:

$$Q(s) = s^{n-1} I + s^{n-2} B_1 + \dots + s^{n-j-1} B_j + \dots + B_{n-1}$$

soit en prenant la trace:

$$\mathrm{Tr}[Q(s)] = s^{n-1}\mathrm{Tr}(I) + s^{n-2}\mathrm{Tr}(B_1) + s^{n-j-1}\mathrm{Tr}(B_j) + \dots + \mathrm{Tr}(B_{n-1})$$

Nous utilisons les relations **5.2.5** pour les B_j.

$$\mathrm{Tr}[Q(s)] = ns^{n-1} + s^{n-2}(n-1)k_1 + s^{n-j-1}(n-j)k_j + \dots + k_{n-1}$$

Le second membre est $\frac{dP}{ds}$. CQFD.

6. FORMULES DE NEWTON

Si nous désignons par

$$t_j = \mathrm{Tr}(A^j) \qquad j = (1, \dots, n)$$

nous avons:

$$\begin{cases} t_1 + k_1 = 0 \\ t_2 + k_1 t_1 + 2k_2 = 0 \\ t_3 + k_1 t_2 + k_2 t_1 + 3k_3 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ t_{n-1} + k_1 t_{n-2} + \dots + k_{n-2} t_1 + (n-1)k_{n-1} = 0 \\ t_n + k_1 t_{n-1} + k_2 t_{n-2} + \dots + k_{n-1} t_1 + nk_n = 0 \end{cases}$$

Ce sont les **formules dites «de Newton»**.

Démonstration

Prenons les traces du troisième groupe de relations **5.2.3**.

$$\begin{cases} \mathrm{Tr}(B_1) = \mathrm{Tr}(A) + nk_1 \\ \mathrm{Tr}(B_2) = \mathrm{Tr}(A^2) + k_1\,\mathrm{Tr}(A) + nk_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \mathrm{Tr}(B_{n-2}) = \mathrm{Tr}(A^{n-2}) + k_1\,\mathrm{Tr}(A^{n-3}) + \dots + k_{n-3}\,\mathrm{Tr}(A) + nk_{n-2} \\ \mathrm{Tr}(B_{n-1}) = \mathrm{Tr}(A^{n-1}) + k_1\,\mathrm{Tr}(A^{n-2}) + \dots + k_{n-2}\,\mathrm{Tr}(A) + nk_{n-1} \\ 0 = \mathrm{Tr}(A_n) + k_1\,\mathrm{Tr}(A^{n-1}) + \dots + k_{n-1}\,\mathrm{Tr}(A) + nk_n \end{cases}$$

Nous avons la relation **5.2.5**:

$$\mathrm{Tr}(B_j) = (n-j)\,k_j \qquad j = (1, \dots, n-1)$$

que nous portons dans le premier membre et nous obtenons les formules de NEWTON.

7. FORMULE DE DUNCAN

Nous pouvons décomposer un polynôme quelconque d'opérateur A en produit d'opérateurs de la forme $(s_i I - A)$ où s_i sont les valeurs propres de A. C'est la formule de DUNCAN.

Soit $g(A)$ un polynôme quelconque d'opérateur linéaire A

$$\boxed{g(A) = \sum_{j=1}^{n} g(s_j) \prod_{i \neq j} \frac{(s_i I - A)}{(s_i - s_j)}}$$

où s_j pour $j = (1, \ldots, n)$ sont les valeurs propres *supposées distinctes de A.*

En particulier pour les puissances A^k de A, nous avons :

$$\boxed{A^k = \sum_{j=1}^{n} (s_j)^k \prod_{i \neq j} \frac{(s_i I - A)}{(s_i - s_j)}}$$

Démonstration

Soit $g(s)$ un polynôme scalaire de s. Nous effectuons sa division par le polynôme caractéristique $P(s)$ suivant les puissances décroissantes de s. Appelons $q(s)$ et $r(s)$ le quotient et le reste :

$$g(s) = P(s)\, q(s) + r(s)$$

le degré de $r(s)$ étant inférieur au degré n de $P(s)$.

Remplaçons s par l'opérateur A :

$$g(A) = P(A)\, q(A) + r(A)$$

D'après le théorème de CAYLEY-HAMILTON (**5.2.4**), nous avons :

$$P(A) = 0$$

de sorte que :

$$g(A) = r(A)$$

Cette relation est vraie quelle que soit la multiplicité des valeurs propres, même dans le cas de dégénérescence. Si nous supposons que les valeurs propres s_i **sont distinctes** (et c'est maintenant qu'intervient cette condition de non dégénérescence), nous avons :

$$\begin{aligned} g(s_j) &= P(s_j)\, q(s_j) + r(s_j) \qquad\qquad j = (1, \ldots, n) \\ &= r(s_j) \end{aligned}$$

car $P(s_j) = 0$.

Nous connaissons donc les n valeurs $r(s_j)$ prises par le polynôme $g(s)$ pour n valeurs **distinctes** s_j. Comme le degré de $r(s_i)$ est inférieur ou égal à $(n-1)$, $g(s)$ peut s'écrire :

$$g(s) = g(s_1)\,\frac{(s-s_2)\,(s-s_3)\,\ldots\,(s-s_n)}{(s_1-s_2)\,(s_1-s_3)\,\ldots\,(s_1-s_n)} + \ldots$$

$$+\, g(s_n)\,\frac{(s-s_1)\,(s-s_2)\,\ldots\,(s-s_{n-1})}{(s_n-s_1)\,(s_n-s_2)\,\ldots\,(s_n-s_{n-1})}$$

$$g(s) = \sum_{j=1}^{n} g(s_j) \prod_{i \neq j} \frac{(s-s_i)}{(s_j-s_i)}$$

Le remplacement de s par A donne immédiatement la formule de DUNCAN

Le cas $g(s) = s^k$ donne la deuxième formule.

Il est possible de donner une extension de la formule de DUNCAN dans le cas dégénéré (valeurs propres d'ordre multiple).

8. RÉSOLVANTE D'UN OPÉRATEUR LINÉAIRE A

Faisons intervenir la valeur caractéristique $x = \frac{1}{s}$. Nous voyons apparaître l'opérateur

$$(I - xA)^{-1} = s(sI - A)^{-1}$$

que nous allons étudier.

A partir de l'expression **5.04** de $(sI - A)^{-1}$ ainsi qu'à partir des expressions **4.3** de P(s) et **5.1.1** de Q(s), nous obtenons :

$$(I - xA)^{-1} = \frac{1}{x}\,\frac{Q\left(\frac{1}{x}\right)}{P\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$= \frac{Q_1\ (x)}{P_1\ (x)}$$

où

8.1.
$$\begin{cases} Q_1(x) = B_0 + B_1x + B_2x^2 + \ldots + B_{n-2}x^{n-2} + B_{n-1}x^{n-1} \\ P_1(x) = 1 + k_1 + k_2x^2 + \ldots + k_{n-1}x^{n-1} + k_nx^n \end{cases}$$

où les coefficients B_j et k_j ont les mêmes significations qu'auparavant.

Nous pouvons obtenir une autre expression de $(I - xA)^{-1}$ en considérant la somme de la série géométrique

$$R(x) = I + xA + (xA)^2 + \dots (xA)^n + \dots$$

dont le domaine de convergence absolue est tel que $| x| \| A \| < 1$*

Il est facile de montrer que :

$$(I - xA)\ R(x) = R(x)\ (I - xA) = I$$

de sorte que :

$$R(x) = (I - xA)^{-1} \qquad \text{pour} \qquad | x | < \frac{1}{\| A \|}$$

On appelle l'opérateur $R(x) = (I - xA)^{-1}$ ***résolvante*** de A. Elle est définie sur un certain domaine moins les valeurs propres de A.

Etant donné le vecteur $\bar{u}_0 \in E$, la résolvante donne la solution en $\bar{u} \in E$ de l'équation** :

$$\bar{u} - xA(\bar{u}) = \bar{u}_0$$

par :

$$\bar{u} = (I - xA)^{-1}\ (\bar{u}_0) = R(x)\ \bar{u}_0$$

Une autre expression de $R(x)$ peut être obtenue par la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $Q_1(x)/P_1(x)$. Dans le cas où les valeurs caractéristiques x_j sont distinctes (cas non dégénéré, multiplicité égale à 1) nous avons :

$$R(x) = (I - xA)^{-1} = \frac{Q_1(x)}{P_1(x)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{C(x_i)}{(x - x_i)}$$

Le numérateur $C(x_j)$ de l'élément simple est égal à :

$$C(x_j) = \Big((x - x_j)\ R(x) \Big)_{x = x_j}$$

$$= \left(\frac{(x - x_j)\ Q_1(x)}{P_1(x)} \right)_{x = x_i}$$

or

$$P_1(x_j) \approx (x - x_j)\ P'_1(x_j)$$

$$= \frac{Q_1(x_j)}{P'_1(x_j)}$$

où $P'_1(x_j)$ est la valeur de la dérivée de $P'_1(x)$ par rapport à x pour $x = x_j$.

---

* Le module $\| A \|$ d'un opérateur A doit être bien entendu défini.

** La résolvante est utilisée dans la théorie des perturbations.

$$R(x) = (I - xA)^{-1} = \frac{Q_1(x)}{P_1(x)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{Q_1(x_j)}{P'_1(x_j)} \cdot \frac{1}{(x - x_j)}$$

Nous avons obtenu une nouvelle décomposition.

Si nous nous plaçons dans l'espace des valeurs propres s_j supposées de multiplicité égale à 1, nous avons :

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\mathrm{Adj}(sI - A)}{\mathrm{dét}(sI - A)} = \frac{Q(s)}{P(s)}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{Q(s_j)}{P'(s_j)} \cdot \frac{1}{(s - s_j)}$$

Nous pouvons obtenir des formules analogues dans le cas des valeurs propres multiples.

Remarque [3] :

Nous voyons à partir de la relation

$$(I - xA)\, R(x) = R(x)\, (I - xA) = I$$

que $R(x)$ est solution de :

$$R(x) = I + xAR(x) \qquad \text{(résolvante à droite)}$$
$$R(x) = I + xR(x)A \qquad \text{(résolvante à gauche)}$$

En effet, A et $R(x)$ commutent car A et Adj(A) commutent.

Parfois, on définit la résolvante $R_1(x)$ par :

$$R_1(x) = \frac{R(x) - I}{x} = \frac{I + xAR(x) - I}{x}$$

soit $R_1(x) = AR(x)$.

Si nous résolvons l'équation :

$$R(x) = I + xAR(x)$$

en remplaçant $R(x)$ dans le second membre par son expression $[I + xAR(x)]$, nous avons :

$$R(x) = I + xA\,[I + xAR(x)]$$
$$= I + xA + x^2A^2R(x)$$

Si nous itérons $(n - 1)$ fois cette transformation, nous obtenons :

$$R(x) = \sum_{j=0}^{n} (xA)^j + x^{n+1}A^{n+1}R(x)$$

Si la série de NEUMANN :

$$I + xA + x^2A^2 + \ldots + x^nA^n + \ldots$$

converge, nous voyons que sa somme est $R(x)$ et nous retrouvons le développement donné plus haut. Quant à $R_1(x)$, nous avons :

$$R_1(x) = AR(x) = A + xA^2 + x^2A^3 + \ldots + x^nA_n{}^{+1} + \ldots$$

Elle vérifie :

$$R_1(x) = A + xAR_1(x)$$

9. VECTEURS PROPRES

Théorème. *Dans le cas où les valeurs propres sont distinctes, les vecteurs propres sont linéairement indépendants.*

Démonstration :

Supposons que j vecteurs propres $(\overline{X}_j)$ forment un système libre $(1 \leqslant j < n$, n étant la dimension de E), *i.e.* :

$$\sum_{i=1}^{j} a_i\overline{X}_i = 0 \qquad ==> \forall\, a_i = 0$$

Nous allons montrer que les $(j + 1)$ vecteurs propres du système $(\overline{X}_1, \overline{X}_2, \ldots, \overline{X}_j, \overline{X}_{j+1})$ forment un système libre. Nous allons démontrer par l'absurde.

Supposons que le système $(\overline{X}_1, \overline{X}_2, \ldots, \overline{X}_j, \overline{X}_{j+1})$ n'est pas libre. Dans ce cas, $\overline{X}_{j+1}$ est une combinaison linéaire des autres :

$$\overline{X}_{j+1} = \sum_{i=1}^{j} b_i\overline{X}_i \qquad b_i \neq 0$$

Appliquons l'opérateur A et tenons compte du fait que les X_i sont des vecteurs propres de A.

$$A\overline{X}_{j+1} = \sum_{i=1}^{n} b_i A\overline{X}_i$$

soit

$$s_{j+1}\overline{X}_{j+1} = \sum_{i=1}^{j} b_i s_i \overline{X}_i$$

$$s_{j+1}\sum_{i=1}^{j} b_i\overline{X}_i = \sum_{i=1}^{j} b_i s_i \overline{X}_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} (s_{j+1} - s_i)\, b_i\overline{X}_i = 0$$

Comme $(\overline{X}_1, \overline{X}_2, \ldots, \overline{X}_j)$ est libre par hypothèse, nous déduisons pour tout i :

$$(s_{j+1} - s_i)\, b_i = 0$$

Or par hypothèse $b_i \neq 0$ et $s_{j+1} \neq s_i$.

Nous obtenons un résultat absurde.

Si $(\overline{X}_1, \overline{X}_2, \ldots, \overline{X}_j)$ est libre, le système $(\overline{X}_1, \overline{X}_2, \ldots \overline{X}_j, \overline{X}_{j+1})$ est aussi libre. CQFD.

Il y en a n vecteurs propres indépendants que nous pouvons prendre comme base B de E.

Théorème. *Sous la condition que les valeurs propres soient distinctes, la matrice représentative de A dans la base B formée par les vecteurs propres est diagonale.*

Démonstration :

Soient $(\overline{X}_i)$ la base B et (ε^j) la base duale de B. Par définition $\underline{\varepsilon}^j(\overline{X}_i) = \delta_i^j$ où δ_i^j est le symbole de KRONECKER.

L'élément A_i^j de la matrice [A] représentatrice de l'opérateur A dans la base B est donnée par :

$$\begin{aligned} A_i^j &= \underline{\varepsilon}^j\,(AX_i) \\ &= \underline{\varepsilon}^j\,(s_i\,X_i) \\ &= s_i\,\underline{\varepsilon}^j\,(X_i) = s_i\quad \delta_i^j \qquad \text{CQFD.} \end{aligned}$$

Remarque :

Faisons remarquer que le cas où *toutes* valeurs propres sont distinctes n'est pas le seul dans lequel la matrice [A] est diagonale.

Dans le cas général, [A] se met sous la *forme de JORDAN.*

Exemple 1.

Soit la matrice antisymétrique *réelle*

$$[A_1] = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ -a & 0 & b \\ 0 & -b & 0 \end{bmatrix}$$

représentant un opérateur A dans une base donnée. Le polynôme caractéristique est :

$$P(s) = \text{dét}(sI - A) = s(s^2 + a^2 + b^2)$$

Les valeurs propres sont :

$$\begin{cases} s_1 = 0 \\ s_2 = it \\ s_3 = -it \end{cases} \qquad \text{ou} \qquad t = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Les vecteurs propres non normés sont :

— pour $s_1 = 0$ $\qquad X_1 = \begin{bmatrix} b \\ o \\ a \end{bmatrix}$

— pour $s_2 = it$ $\qquad X_2 = \begin{bmatrix} a \\ it \\ -b \end{bmatrix}$

— pour $s_3 = -it$ $\qquad X_3 = \begin{bmatrix} a \\ -it \\ -b \end{bmatrix}$

Nous vérifions rapidement que les vecteurs propres $\bar{X}_1$, $\bar{X}_2$, $\bar{X}_3$ sont orthogonaux. La matrice $[A_2]$ représentant l'opérateur A dans la base $(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3)$ si celle-ci est normée est diagonale :

$$[A_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & it & 0 \\ 0 & 0 & -it \end{bmatrix}$$

La matrice $[A_1]$ est réelle mais deux de ses valeurs propres sont imaginaires pures conjuguées ($+ it$ et $- it$).

Exemple 2.

Soit la matrice

$$[B] = \begin{bmatrix} -6 & 5 & 3 \\ -8 & 7 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Le polynôme caractéristique

$$\text{dét}(sI - B) = s(s - 1)^2$$

donne les valeurs propres

$$\begin{cases} s_1 = 0 & & \text{(simple)} \\ s_2 = s_3 & = 1 & \text{(double)} \end{cases}$$

Les vecteurs propres sont :

$$\bar{X}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \text{pour } s_1 = 0$$

$$\bar{X}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \text{pour la valeur double 1.}$$

Pour avoir une base de l'espace à trois dimensions, nous complétons les vecteurs $\bar{X}_1$ et $\bar{X}_2$ par un vecteur arbitraire $\bar{X}_3$ que nous devons prendre de façon que $(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3)$ soit un système libre. Nous pouvons prendre, par exemple,

$$X_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dans la base (X_1, X_2, X_3), la matrice [B] se met sous la forme de JORDAN :

$$[B_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sur la diagonale, nous avons les valeurs propres (0,1,1), mais $[B_2]$ n'est pas diagonale.

10. THÉORÈME DE HILBERT-DIRAC

Cherchons à comparer les valeurs propres d'un opérateur linéaire A de E aux valeurs propres d'un polynôme R de cet opérateur. Nous obtenons alors le théorème de HILBERT-DIRAC.

Théorème. *Soient A un opérateur linéaire d'un espace vectoriel E sur K et R un polynôme à coefficients dans K.*

Pour tout scalaire s *et pour tout entier naturel* r, *le noyau de l'opérateur linéaire* $[R(s)I - R(A)]^r$ *contient le noyau de l'opérateur linéaire* $(sI - A)^r$.

En particulier, soit s_i une valeur propre de A. *

* $R(s_i)$ est une valeur propre de R(A).

* Le sous-espace propre de A correspondant à la valeur propre s_i est contenu dans le sous-espace propre de R(A) correspondant à la valeur propre $R(s_i)$.

Démonstration :

Considérons le polynôme $R(s_i) - R(s)$. Ce polynôme s'annule pour $s = s_i$, donc est divisible par $s_i - s$:

$$R(s_i) - R(s) = Q(s)\,(s_i - s)$$

Pour tout entier naturel r, nous avons :

$$[R(s_i) - R(s)]^r = [Q(s)]^r\,(s_i - s)^r$$

Remplaçons s par l'opérateur linéaire A

$$[R(s_i)I - R(A)]^r = [Q(A)]^r\,(s_iI - A)^r$$

Si $X \in \mathrm{Noy}[s_iI - A]^r$ c'est-à-dire :

$$(s_iI - A)\,X = \vec{0}_E$$

* On peut voir que le sous-espace spectral de A correspondant à s_i est contenu dans le sous-espace spectral de R(A) correspondant à $R(s_i)$.

nous avons :

$$[R(s_i)I - R(A)]^r \bar{X} = [Q(A)]^r [s_iI - A]^r \bar{X}$$
$$= 0_{\bar{E}}$$

d'où $\bar{X} \in \text{Noy}[R(s_i)I - R(A)]^r$

Nous obtenons l'inclusion :

$$\text{Noy}[s_iI - A]^r \subset \text{Noy}\ [R(s_i)I - R(A)]^r$$

et $R(s_i)$ est la valeur propre de $R(A)$.

11. CALCUL PRATIQUE DES VALEURS ET VECTEURS PROPRES

Nous prenons une base. Dans cette base, l'opérateur A est représenté par une matrice [A]. Nous déterminons les racines s_j du polynôme caractéristique $\text{dét}(sI - [A]) = 0$.

Puis, pour la valeur connue s_j, nous résolvons l'équation aux vecteurs propres $[\bar{X}_j]$

$$[A]\ [\bar{X}_j] = s_j\ [\bar{X}_j]$$

Le vecteur $[\bar{X}_j]$ est connu à une constante multiplicative près, ce qui permet de la normer.

Par un changement de base, nous mettons la matrice sous forme réduite. Sur la diagonale, nous devons avoir les valeurs propres. Les calculs du polynôme caractéristique et de l'inverse $(sI - A)^{-1}$, rappelons-le, peuvent être simplifiés par l'utilisation des formules **5.2.2.*d*.**

En effet, il est plus facile de calculer des traces que des déterminants, surtout quand la dimension de l'espace est élevée. La Trace d'un opérateur est intrinsèque, elle peut être calculée *dans n'importe quelle base,* en particulier, dans celle dans laquelle l'opérateur A est exprimé.

Donnons quelques exemples.

Exemple. 1.

Pour un opérateur A dans l'espace à deux dimensions, nous pouvons écrire tout de suite le polynôme caractéristique :

$$P(s) = s^2 - s\text{Tr}(A) + \text{dét}\ (A)$$

Si A est représenté dans une base par la matrice

$$[A_1] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Tr}[A_1] = a + d$$
$$\mathrm{dét}(A) = ad - bc$$
$$P(s) = s^2 - (a + d)s + (ad - bc)$$

Exemple 2.

Soit l'opérateur représenté dans une base par la matrice

$$[A] = \begin{bmatrix} -6 & 5 & 3 \\ -8 & 7 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Le polynôme caractéristique est du troisième degré

$$P(s) = s^3 + k_1 s^2 + k_2 s + k_3$$

Utilisons l'algorithme **5.2.2.***d*

$$k_1 = -\mathrm{Tr}(A) = -(-6 + 7 + 1) = -2$$

$$B_1 = A + k_1 I = A - 2I = \begin{bmatrix} -8 & 5 & 3 \\ -8 & 5 & 4 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(B_1.A) = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$k_2 = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(B_1.A) = -\frac{2 - 1 - 3}{2} = 1$$

$$B_2 = (B_1.A) + I$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(B_2.A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$k_3 = -\frac{1}{3}\,\mathrm{Tr}(B_2.A) = 0 = -\,\mathrm{dét}(A)$$

La matrice A est singulière car dét(A) = 0, ce qui est vite vérifiée car $s_1 = 0$ est valeur propre de A. Nous avons donc :

$$P(s) = s^3 - 2s^2 + s = s(s^2 - 2s + 1) = s(s-1)^2$$

$$Q(s) = \mathrm{Adj}(sI - A) = s^2 I + sB_1 + B_2$$

$$Q(s) = \begin{bmatrix} s^2 - 8s + 3 & 0 + 5s - 2 & 0 + 3s - 1 \\ 0 - 8s + 0 & s^2 + 5s + 0 & s^2 + 4s + 0 \\ 0 - 2s + 6 & 0 + s - 4 & 0 - s - 2 \end{bmatrix}$$

Nous obtenons par le même calcul l'inverse :

$$(sI - A)^{-1} = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{Q(s)}{s(s-1)^2}$$

12. SPECTRE DES OPÉRATEURS SYMÉTRIQUES ET HERMITIQUES

Théorème 12.1. *Les valeurs propres d'un opérateur symétrique (ou hermitique) sont réelles.*

Théorème 12.2. *Les vecteurs propres correspondant à des valeurs propres différentes sont orthogonaux.*

Démonstration :

Nous allons démontrer les deux théorèmes ensemble. Soient u_1 et u_2 deux vecteurs propres de A avec les valeurs propres respectives s_1 et s_2.

$$A\bar{u}_1 = s_1 \bar{u}_1$$
$$A\bar{u}_2 = s_2 \bar{u}_2$$

Calculons le produit scalaire $(\bar{u}_1, A\bar{u}_2)$ et utilisons l'hypothèse que A est symétrique (ou hermitique).

$(\bar{u}_1, A\bar{u}_2) = (A\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ A est symétrique ou hermitique.

$(\bar{u}_1, s_2\bar{u}_2) = (s_1\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ $\bar{u}_1$ et $\bar{u}_2$ sont vecteurs propres de A avec les valeurs propres s_1 et s_2.

$(s_2 - s_1^*)\,(\bar{u}_1, \bar{u}_2) = 0$

De cette relation nous déduisons :

a. pour $\bar{u}_2 = \bar{u}_1$, $(\bar{u}_1, \bar{u}_1) \neq 0$ d'où $s_1 - s_1^* = 0$

s_1 est réel.

b. Si $s_2 \neq s_1$ donc $s_2 \neq s_1^*$, $(\bar{u}_1, \bar{u}_2) = 0$ u_1 et $\bar{u}_2$ sont orthogonaux. CQFD.

Remarque :

De ces deux théorèmes, nous déduisons que nous pouvons trouver une base *orthonormée* formée par les vecteurs propres, base dans laquelle l'expression de A est diagonale (*figure 1*). Le nombre de fois où la valeur propre s_j apparaît sur la diagonale, est égal à la multiplicité n_j de s_j. La dimension du sous-espace propre correspondant à s_j est égal à la multiplicité n_j.

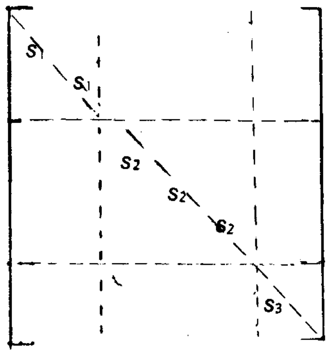

Figure 1. Forme diagonale de A

Nous voyons de même :

- pour que l'opérateur A soit *défini positif,* il faut et il suffit que *toutes* ses valeurs propres soient positives ou nulles (ce qui entraîne dét(A $\geqslant$ 0) ;
- pour que l'opérateur A soit *défini positif* non dégénéré, il faut et il suffit que *toutes* ses valeurs propres soient strictement positives (ce qui entraîne dét A $>$ 0) ;
- l'opérateur A est *défini positif dégénéré* s'il est défini positif et s'il admet 0 comme valeur propre (détA = 0), A n'est donc pas régulier.

13. SPECTRE DES OPÉRATEURS ORTHOGONAUX ET UNITAIRES

Théorème 13.1. *Les valeurs propres d'un opérateur orthogonal (ou unitaire) sont de module égal à 1.*

Théorème 13.2 *Les vecteurs propres d'un opérateur orthogonal (ou unitaire) correspondant à des valeurs propres différentes sont orthogonaux.*

Démonstration :

Calculons le produit scalaire

$(A\bar{u}_1, A\bar{u}_2) = (\bar{u}_1, \bar{u}_2)$	A est orthogonal (ou unitaire).
$(s_1\bar{u}_1, s_2\bar{u}_2) = (\bar{u}_1, \bar{u}_2)$	u_1 et u_2 sont vecteurs propres de A avec les valeurs propres s_1 et s_2.
$(s_1^* s_2 - 1)\ (\bar{u}_1, \bar{u}_2) = 0$	propriété du produit scalaire.

d'où :

— si $\bar{u}_2 = \bar{u}_1$, nous avons $s_1^* s_1 = | s_1 |^2 = 1$

— si $s_2 \neq s_1$, nous avons $s_1^* s_2 - 1 \neq 0$

$(\bar{u}_1, \bar{u}_2) = 0.$ CQFD.

Remarques :

a. De la définition d'un opérateur orthogonal (ou unitaire)

$$A^*.A = I$$

nous déduisons :

$$\text{dét}(A^*).\text{dét}(A) = \overline{\text{dét}(A)}.\text{dét}A = 1$$

$$| \text{dét}(A) |^2 = 1$$

Comme dét A est égal au produit des valeurs propres $s_1, \dots s_n$, nous avons :

$$| s_1 s_2 s_3 \dots s_n | = 1$$

Le théorème **3.1** affirme que *tous* les $| s_j |$ sont égaux à 1, c'est-à-dire :

$$\forall | s_j | = 1 \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} | s_1 | s_2 | \ | s_3 | \dots | s_n | = 1 \Longleftrightarrow | s_1 s_2 s_3 \dots s_n | = 1$$

b. Comme $| \text{dét} A | = 1$ donc différent de 0, un opérateur orthogonal (ou unitaire) est *nécessairement* régulier ;

c. Considérons le cas d'un opérateur orthogonal A_1 sur l'espace vectoriel *réel* E_n. Dans une base orthonormée, A_1 est représentée par une matrice orthogonale $[A_1]$.

Le polynôme caractéristique

$$P(s) = \text{dét}(sI - [A]) = s^n + k_1 s^{n-1} + \ldots + k_n$$

a ses coefficients k_j réels. Les racines s_j sont réelles ou deux à deux imaginaires conjuguées.

Si la dimension n de E est *impair*, l'une au moins des valeurs propres est réelle. Comme son module est égal à 1, elle est égale à 1 ou —1. Appelons s_n cette valeur propre et u_n le vecteur propre correspondant.

$$A\,\bar{u}_n = s_n\,\bar{u}_n = \begin{cases} \bar{u}_n & \text{si } s_n = 1\text{ ; c'est une rotation autour du vecteur } \bar{u}_n \\ -\,\bar{u}_n & \text{si } s_n = -1\text{ ; elle correspond à une symétrie} \end{cases}$$

$\bar{u}_n$ est donc stable par l'opérateur A.

Pour préciser les transformations, prenons un exemple simple.

Exemple de l'espace euclidien (donc réel) E_3.

Considérons le cas $s_3 = 1$. Les deux autres valeurs propres s_1 et s_2 sont imaginaires conjuguées.

$$\begin{cases} s_1 = e^{i\theta} & \theta \text{ réel} \\ s_2 = e^{-i\theta} \end{cases}$$

Nous pouvons prendre pour vecteurs propres correspondant à s_1 et s_2 et s_3 des vecteurs normés de la forme :

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{x} + i\vec{y}}{2} \text{ et } u_2 = \frac{\vec{x} - i\vec{y}}{2} \text{ et } \vec{u}_3$$

$$A\,\frac{(\vec{x} + i\vec{y})}{\sqrt{2}} = e^{i\theta}\,\frac{(\vec{x} + i\vec{y})}{\sqrt{2}}$$

$$A\,\frac{(\vec{x} - i\vec{y})}{\sqrt{2}} = e^{-i\theta}\,\frac{(\vec{x} - i\vec{y})}{\sqrt{2}}$$

$$A\,\vec{u}_3 = \vec{u}_3$$

La matrice représentative de A dans la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est :

13.a $$[A_1] = \begin{bmatrix} e^{i\theta} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dans la base (x, y, u_3), c'est la matrice

$$\textbf{13.}b \qquad [A_2] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

C'est une rotation $\mathscr{R}(\theta, \vec{u}_3)$ d'angle θ d'axe $\vec{u}_3$. Le cas $s_n = -1$ donne :

$$\textbf{13.}c \qquad [A'_1] = \begin{bmatrix} e^{i\theta} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

représentant A dans la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ et

$$\textbf{13.}d \qquad [A'_2] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

représentant A dans la base $(x, y\ u_3)$.

Nous voyons que c'est le produit $\mathscr{R}(\theta, u_3)\ \mathscr{S}(\pi)$ d'une rotation $\mathscr{R}(\theta, \bar{u}_3)$ d'angle θ d'axe $\vec{u}_3$ et d'une symétrie $\mathscr{S}(\pi)$ par rapport au plan π perpendiculaire à $\bar{u}_3$ (le produit est d'ailleurs commutatif).

Le groupe des transformations orthogonales de l'espace euclidien (déplacement) est désigné par 0(3). Le sous-groupe de ***déterminant*** égal à + 1 est désigné par S0(3) (le sigle S est celui de ***spécial*** et correspond au déterminant égal à + 1).

L'extension à l'espace à n dimensions est immédiate, nous avons le groupe $0(n)$ et le groupe $S\,0(n)$. Pour les transformations unitaires, nous avons le groupe $U(n)$ et le sous-groupe $S\,U(n)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] SOURIAU (J.-M.). — Calcul linéaire, Presses universitaires de France, 1959.

J.-M. Souriau, *C. R. Acad. Sc.* Paris, **15** (1948) 11.

FORSYTHE (G.-E.), STRAUS (L.-W.). — The Souriau frame characteristic equation algorithm on a digital computer. *J. Math. Phys.* **34** (1958) 3.

[2] CHAMBADAL (L.), OVAERT (J.-L.). — *Algèbre linéaire et algèbre tensorielle,* éd. Dunod, Paris, 1968, p. 238.

[3] LICHNEROWICZ (A.). — *Algèbre et Analyse linéaire,* éd. Masson et C^ie, Paris, 1956, p. 93.