RELATIONS REMARQUABLES CONCERNANT LES FORMES BILINEAIRES, QUADRATIQUES, SESQUILINEAIRES ET HERMITIQUES

par RAOELINA ANDRIAMBOLOLONA

Laboratoire de Physique, BP 138
Université de Madagascar
Antananarivo, Madagascar

Résumé :

Nous donnons les formules concernant les formes bilinéaires, quadratiques, sesquilinéaires et hermitiques sur un espace vectoriel et faisant intervenir le barycentre de n vecteurs. Nous obtenons ainsi les généralisations de la formule classique de LEIBNIZ.

Abstract :

Formulae concerning bilinear, quadratic, sesquilinear and hermitic forms on a vectorial space and involving the « centre of masses » are given. Generalizations of LEIBNIZ's classical formula are derived.

1. INTRODUCTION, RAPPEL DES DEFINITIONS

Le but de ce travail est de donner les relations remarquables concernant les formes bilinéaires, quadratiques, sesquilinéaires et hermitiques. Ce sont les généralisations des formules classiques dans le cas de l'espace euclidien à deux ou à trois dimensions. Nous verrons que les généralisations ne sont pas immédiates contrairement à ce qu'on pourrait penser de prime abord. De même, certaines formules que nous donnons dans ce travail ne sont pas courantes ; nous le signalerons dans la conclusion (par exemple la généralisation de la formule classique de LEIBNIZ).

Nous utiliserons la notation d'opérateurs doubles pour le « produit scalaire » au lieu de la notation habituelle. Cette écriture présente l'avantage, non seulement d'être claire et simple mais aussi d'être cohérente et d'être immédiatement généralisable aux cas des opérateurs multiples. Ainsi, nous concevons que la généralisation des formes bilinéaires conduit aux tenseurs covariants sans que nous ayons à changer de notation, ce qui n'est pas le cas si nous gardons la notation habituelle $(\bar{x}, \bar{y})$ pour le produit scalaire de deux vecteur $\bar{x}$ et $\bar{y}$.

Avant de donner les formules, rappelons les définitions suivantes.

Soient E et F deux espaces vectoriels construits sur le même corps K, X un opérateur appliquant E dans F. X est linéaire (ou est un élément de $\mathcal{L}$ (E, F) si et seulement si nous avons :

$$X(\bar{x}) \text{ est un élément de F}$$
$$X(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}) = \alpha X(\bar{x}) + \beta X(\bar{y})$$

pour tous α et β de K et tous $\bar{x}$ et $\bar{y}$ de E.

Il y a une deuxième définition équivalente à la première

$$X(\bar{x} + \bar{y}) = X(\bar{x}) + X(\bar{y})$$
$$X(\alpha\bar{x}) = \alpha A(\bar{x})$$

pour tous $\bar{x}$ et $\bar{y}$ de E et tout α de K. *

---

* L'adjectif « *tout* » dans « *tout* α de K » est essentiel. En effet, la relation $A(\bar{x} + \bar{y}) = A(\bar{x}) + A(\bar{y})$ *entraîne* $A(\alpha\bar{x}) = \alpha A(\bar{x})$ pour α *entier* comme on peut le montrer par récurrence. En effet,

$$A(\bar{x} + \bar{x}) = A(\bar{x}) + A(\bar{x}) = 2\,A(\bar{x})$$

Puis par récurrence : $A(n\bar{x}) = nA(\bar{x})$ pour n *entier.*

La relation $A(\alpha\bar{x}) = \alpha A(\bar{x})$ est indépendante de $A(\bar{x} + \bar{y}) = A(\bar{x}) + A(\bar{y})$ si nous affirmons qu'elle est vraie pour *tout* α de K.

Un opérateur Y est antilinéaire (ou est un élément de $\mathcal{A}$ (E, F)) si et seulement si nous avons :

$$Y(\vec{x}) \text{ est un élément de F}$$

$$Y(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha^* Y(\vec{x}) + \beta^* Y(\vec{y})$$

pour tous α et β de K et tous x et y de E, l'étoile signifiant la conjugaison complexe.

Les opérateurs antilinéaires ne sont intéressants que dans le cas du corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes ; en effet, l'antilinéarité se ramène à la linéarité dans le cas du corps $\mathbb{R}$ des nombres réels.

Un opérateur *bilinéaire* est un opérateur double deux fois linéaire.

Un opérateur *sesquilinéaire* est un opérateur double, une fois linéaire, une fois antilinéaire.

Une *forme* est un opérateur appliquant un espace vectoriel dans le corps K.

Une *forme bilinéaire* B sur E est donc un opérateur double, deux fois linéaire appliquant E $\times$ E dans K :

$B(\vec{x})(\vec{y})$ est un élément de K. (B est une forme)

$B(\vec{x})(\alpha\vec{y} + \alpha'\vec{y}') = \alpha B(\vec{x})(\vec{y}) + \alpha' B(\vec{x})(\vec{y}')$ (linéarité par rapport au second terme)

$B(\alpha\vec{x} + \alpha'\vec{x}')\ (\vec{y}) = \alpha B(\vec{x})(\vec{y}) + \alpha' B(\vec{x}')(\vec{y})$ (linéarité par rapport au premier terme)

pour tous α et α' de K et tous $\vec{x}$, $\vec{x}'$, $\vec{y}$ et y' de E.

La forme quadratique Q associée à la forme bilinéaire B est définie par :

$$Q(\vec{x}) = B(\vec{x})(\vec{x})$$

pour tout $\vec{x}$ de E.

Une *forme sesquilinéaire* S sur E est un opérateur double appliquant E $\times$ E dans K, antilinéaire par rapport au premier terme et linéaire par rapport au second terme :

$S(\vec{x})(\vec{y})$ est un élément de K (S est une forme)

$S(\vec{x})(\alpha\vec{y} + \alpha'\vec{y}') = \alpha\ S(\vec{x})(\vec{y}) + \alpha' S(\vec{x})(\vec{y}')$

$S(\alpha\vec{x} + \alpha'\vec{x}')(\vec{y}) = \alpha^*\ S(\vec{x})(\vec{y}) + \alpha'^*\ S(\vec{x}')(\vec{y})$

pour tous α et α' de K et tous $\vec{x}$, $\vec{x}'$, $\vec{y}$ et $\vec{y}'$ de E.

La *forme hermitique* H sur E associée à la forme sesquilinéaire S est définie par:

$$H(\overline{x}) = S(\overline{x})(\overline{x})$$

pour tout $\overline{x}$ de E.

On démontre facilement qu'il existe une bijection des formes bilinéaires (respectivement sesquilinéaires) sur E et les opérateurs linéaires (respectivement antilinéaires) appliquant E dans son dual E*.

Une forme bilinéaire B (respectivement sesquilinéaire S) est symétrique (respectivement a la symétrie hermitique) si et seulement si $B(\overline{x})(\overline{y})$ (respectivement $S(\overline{x})(\overline{y})$) est égal à $B(\overline{y})(\overline{x})$ (respectivement $(S(\overline{y})(\overline{x})^{*})$ pour tous $\overline{x}$ et $\overline{y}$ de E.

Des définitions, nous déduisons immédiatement les deux relations suivantes:

$$B(\alpha^{i}\overline{x}_{i})\ (\beta^{j}\overline{y}_{j}) = \alpha^{i}\beta^{j}\ B(\overline{x}_{i})(\overline{y}_{j})$$

$$S(\alpha^{i}\overline{x}_{i})\ (\beta^{j}\overline{y}_{j}) = \alpha^{i*}\ \beta^{j}\ S(\overline{x}_{i})(\overline{y}_{j})$$

pour tous α^{i}, β^{j} de K, et tous $\overline{x}_{i}$ et $\overline{y}_{j}$ de E.

Nous adoptons dans tout ce travail la *convention de sommation d'Einstein:* nous sommons sur les indices répétés placés l'un en position haute, l'autre en position basse.

2. FORMES BILINEAIRES ET QUADRATIQUES

Le corps K sera le corps $\mathbb{R}$ des réels.

2.1. Relation fondamentale.

Théorème 1. *Pour tout entier* k, *tous* α^{j} *de* $\mathbb{R}$ *, et tous vecteurs* $\overline{x}_{j}$ *et* $\overline{m}$ *de E, nous avons pour la forme bilinéaire B sur E et la forme quadratique Q associée à B:*

2.1.1.

$$\alpha^{j}Q(\overline{x}_{j} - \overline{m}) = \alpha^{j}Q(\overline{x}_{j}) + \alpha Q(\overline{m}) - B(\alpha^{j}\overline{x}_{j})(m) - B(\overline{m})(\alpha^{j}\overline{x}_{j})$$

$$\alpha = \sum_{j=1}^{k} \alpha^{j}$$

$$j = (1, \ldots, k)$$

La démonstration est immédiate en utilisant la définition de Q et la bilinéarité de B.

De même, nous avons :

$$Q(\alpha\bar{x}) = \alpha^2 Q(\bar{x})$$

pour tout α de $\mathbb{R}$ et tout x de E.

2.2. Relations entre B et Q

2.2.1. *Première et deuxième formules de la médiane.*

Théorème 2. *Soient B une forme bilinéaire* quelconque *(symétrique ou non) sur E et Q la forme quadratique associée, nous avons :*

2.2.1.1. $Q(\bar{x} + \bar{y}) + Q(\bar{x} - \bar{y}) = 2[Q(\bar{x}) + Q(\bar{y})]$

2.2.1.2. $Q(\bar{x} + \bar{y}) - Q(\bar{x} - \bar{y}) = 2[B(\bar{x})(\bar{y}) + B(\bar{y})(\bar{x})]$

Démonstration

Nous calculons $Q(\bar{x} + \bar{y})$ et $Q(\bar{x} - \bar{y})$ en utilisant la relation fondamentale ($\alpha^j \equiv 1$, $\bar{x}_j \equiv \bar{x}$, $\bar{m} \equiv \pm \bar{x}$) et nous ajoutons et retranchons les deux expressions.

Remarque

Les noms de « première et deuxième formules de la médiane » viennent du fait que ces relations sont les généralisations des formules relatives à la médiane dans un triangle. En effet, faisons la correspondance :

$$\begin{array}{lcl}
\bar{x} - \bar{y} & \longrightarrow & \overrightarrow{AB} \\
\bar{x} + \bar{y} & \longrightarrow & \overrightarrow{AC} \\
\bar{x} & \longrightarrow & \dfrac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2} = \overrightarrow{AM} \\
\bar{y} & \longrightarrow & \dfrac{\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}}{2} = \dfrac{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}}{2} = \dfrac{\overrightarrow{BC}}{2} = \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MC} \\
B & \longrightarrow & \text{produit scalaire}
\end{array}$$

Le point M est donc le pied de la médiane AM du triangle ABC.

A la première formule **2.2.1.1** correspond la relation dans le triangle ABC :

$$\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 = 2(\overrightarrow{AM}^2 + \overrightarrow{BM}^2)$$

qui est la formule bien connue de la médiane :

$$b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2}$$

A la seconde relation **2.2.1.2**, correspond la relation dans le triangle ABC :

$$\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2 = 2[\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AM}]$$

qui, dans le cas d'une forme bilinéaire *symétrique*, donne bien :

$$b^2 - c^2 = 2.\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}$$

2.2.2. *Identités de polarisation.*

Théorème 3. *Etant donnée une forme quadratique Q, il est possible d'obtenir la forme bilinéaire B associée mais nous* devons *la supposer* symétrique *(forme* polaire *de Q) à l'aide de l'identité de polarisation :*

$$B(\bar{x})(\bar{y}) = \frac{1}{4}\,[Q(\bar{x} + \bar{y}) - Q(\bar{x} - \bar{y})]$$

La démonstration est immédiate en utilisant la deuxième formule de la médiane dans le cas où B est symétrique. De même, nous avons la deuxième relation de polarisation dans le cas d'une forme bilinéaire B *symétrique :*

$$B(\bar{x})(\bar{y}) = \frac{1}{2}\,[Q(\bar{x} + \bar{y}) - Q(\bar{x}) - Q(\bar{y})]$$

La démonstration est immédiate.

2.2.3. *Relations concernant le barycentre.*

Théorème 4. *Quelles que soient la forme bilinéaire B et la forme quadratique Q associée à B, pour tout entier* k, *pour tous* $\bar{x}_i$ *et* $\bar{m}$ *de E et tous* α^i *de* $\mathbb{R}$, *nous avons la relation :*

2.2.3.1. $\alpha^j\, Q(\bar{x}_j - \bar{m}) = \alpha\, Q(\bar{c} - \bar{m}) + \alpha^i\, Q(\bar{x}_i - \bar{c})$

2.2.3.2. ou $\alpha = \sum_{j=1}^{k} \alpha^j$

$\bar{c}$ est le « barycentre » des vecteurs $\bar{x}_j$ affectés des coefficients α^i, défini par :

2.2.3.3. $\sum_{i=1}^{k} \alpha^i \bar{x}_i = \alpha \bar{c}$

Démonstration

Nous utilisons la relation fondamentale **2.1.1** en écrivant :

$$\bar{x}_j - \bar{m} = (\bar{x}_j - \bar{c}) + (\bar{c} - \bar{m})$$

$$\alpha^j\, Q(\bar{x}_j - \bar{m}) = \alpha^j\, Q(\bar{x}_j - \bar{c}) + \alpha\, Q(\bar{c} - \bar{m}) - B(\alpha^j(\bar{x}_j - \bar{c}))(\bar{c} - \bar{m})$$
$$- B(\bar{c} - \bar{m})(\alpha^j(\bar{x}_j - \bar{c}))$$

Or par définition de $\bar{c}$, nous avons :

$\alpha^j(\bar{x}_j - \bar{c}) = \bar{0}_E$

d'où la relation **2.2.3.1**.

Remarque :

La relation **2.2.3.1** est la généralisation de la formule de LEIBNIZ :

$$\alpha^j\, \overrightarrow{MA_j}^2 = \alpha\, \overrightarrow{MG}^2 + \alpha^i\, \overrightarrow{GA_i}^2$$

où G est le barycentre des points A_i affectés des coefficients α^i. G correspond au vecteur $\bar{c}$ de E défini par la relation **2.2.3.3**. Nous montrerons que la généralisation de la formule de LEIBNIZ dans le cas du corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes n'est pas immédiate.

De même, dans la démonstration classique de la formule de LEIBNIZ, on suppose dès le départ que le « produit scalaire de deux vecteurs » est *symétrique*. Nous voyons que *cette hypothèse est inutile ici.*

Nous ne donnons pas les propriétés qui découlent de la positivité ou de la positivité définie de B ou de Q (inégalité de SCHWARZ — CAUCHY — BOUNIAKOVSKI, inégalité triangulaire, semi-norme, norme, distance induite par la norme) car on peut les trouver dans la plupart des manuels.

3. FORMES SESQUILINÉAIRES ET HERMITIQUES

Pour que nous ne retombions pas dans le cas du paragraphe 2, le corps K sera celui $\mathbb{C}$ des complexes.

3.1. Relations fondamentales.

Théorème 5. *Pour tout entier* k, *tous* α^i *de* $\mathbb{C}$, *et tous vecteurs* $\bar{x}_i$ *et* $\bar{m}$ *de E, nous avons pour la forme sesquilinéaire S sur E et la forme hermitique H associée à S :*

3.1.1. $\alpha^i\, H(\bar{x}_i - \bar{m}) = \alpha^i\, H(\bar{x}_i) + \alpha H(\bar{m}) - S(\alpha^{i*}\bar{x}_i)(\bar{m}) - S(\bar{m})(\alpha^i\bar{x}_i)$

$$\text{où } \alpha = \sum_{j=1}^{k} \alpha^j$$

$$j = (1, \ldots, k)$$

La démonstration est immédiate en utilisant la définition de H et la sesquilinéarité de S.

Nous avons pris l'antilinéarité par rapport au premier terme, et la linéarité par rapport au second car dans la pratique, en Physique, c'est la convention généralement adoptée. En Mathématiques, on prend parfois la linéarité par rapport au premier et l'antilinéarité par rapport au second terme. Les deux définitions se correspondent bijectivement par conjugaison complexe.

De même, nous avons pour tout α de $\mathbb{C}$ et pour tout $\overline{x}$ de E :

$$H(\alpha\overline{x}) = \|\alpha\|^2 \, H(\overline{x})$$

3.2. Relations remarquables

Théorème 6. *Pour tout entier* k, *pour tous α^j de $\mathbb{C}$, pour tous vecteurs $\overline{x}_j$, $\overline{y}$ et $\overline{m}$ de E et pour $\overline{c}$ défini par :*

3.2.1. $\alpha^j\overline{x}_j = \alpha\overline{c}$

3.2.2. $$\text{où } \alpha = \sum_{j=1}^{k} \alpha^j$$

nous avons :

3.2.3. $\alpha^j \, S(\overline{x}_j - \overline{c})(\overline{y}) = (2i \, Im\alpha^j) \, S(\overline{x}_j - \overline{c})(\overline{y})$

Démonstration

$$\alpha^j \, S(\overline{x}_j - \overline{c})(\overline{y}) = S(\alpha^{j*}(\overline{x}_j - \overline{c}))(\overline{y})$$

Nous écrivons que :

$$\alpha^{j*} = \alpha^j - 2i \, Im \, \alpha^j$$

de sorte que :

$$S(\alpha^{j*}(\bar{x}_j - \bar{c}))(\bar{y}) = S(\alpha^j(\bar{x}_j - \bar{c}) - 2i \, Im \, \alpha^j(\bar{x}_j - \bar{c}))(\bar{y})$$
$$= S(-2i \, Im \, \alpha_j(\bar{x}_j - \bar{c}))(\bar{y})$$
$$= (2i \, Im \, \alpha^j) \, S(\bar{x}_j - \bar{c})(\bar{y})$$

car $\alpha^j(\bar{x}_j - \bar{c}) = \bar{0}_E$ par définition de $\bar{c}$. CQFD.

Nous avons donc :

$$\alpha^j \, S(\bar{y})(\bar{x}_j - \bar{c}) = 0 \text{ pour tout } \bar{y} \text{ de } E$$

c'est-à-dire $\alpha^{j*} \, S(\bar{x}_j - \bar{c})(\bar{y}) = 0$ pour tout $\bar{y}$ de E mais l'expression

$$\alpha^j \, S(\bar{x}_j - \bar{c})(\bar{y})$$

n'est nul que si tous les α^j *sont réels,* ce qui est d'ailleurs évident à cause de l'antilinéarité de S par rapport au premier terme.

Théorème 7. *Pour tout entier* k, *tous* α^j *de* $\mathbb{C}$, *tous vecteurs* $\bar{x}_j$ *et* $\bar{m}$ *de E, pour* $\bar{c}$ *défini par* **3.2.1**, *et pour la forme hermitique H associée à la forme sesquilinéaire S* quelconque *(à symétrie hermitique ou non), nous avons :*

3.2.4.

$$\alpha^j H(\bar{x}_j - \bar{m}) = \alpha^j H(\bar{x}_j - \bar{c}) + \alpha \, H(\bar{c} - \bar{m}) - 2i(Im\alpha^j)S(\bar{x}_j - \bar{c})(\bar{c} - \bar{m})$$

Démonstration

Faisons intervenir le vecteur $\bar{c}$ défini par **3.2.1**

$$\bar{x}_j - \bar{m} \equiv (\bar{x}_j - \bar{c}) + (\bar{c} - \bar{m})$$

Nous développons $H((\bar{x}_j - \bar{c}) + (\bar{c} - \bar{m}))$ en utilisant la formule fondamentale **3.1.1** :

$$\alpha^j \, H(\bar{x}_j - \bar{m}) = \alpha^j \, H((\bar{x}_j - \bar{c}) + (\bar{c} - \bar{m}))$$
$$= \alpha^j \, H(\bar{x}_j - \bar{c}) + \alpha \, H(\bar{c} - \bar{m}) - \alpha^j \, S(\bar{x}_j - \bar{c})(\bar{c} - \bar{m}) - \alpha^j \, S(\bar{c} - \bar{m})(\bar{x}_j - \bar{c})$$

Le quatrième terme est nul par définition de $\bar{c}$. Nous utilisons la relation **3.2.3** pour transformer le troisième terme et nous obtenons la relation **3.2.4**.

Théorème 8. *Pour tout entier* k, *tous* α^j réels, *tous vecteurs* $\bar{x}_j$ *et* $\bar{m}$ *de E et pour* $\bar{c}$ *défini par* **3.2.1** *et pour la forme hermitique H associée à une forme sesquilinéaire S* quelconque *(à symétrie hermitique ou non), nous avons :*

3.2.5. $\quad \alpha^j \, H(\bar{x}_j - \bar{m}) = \alpha^j \, H(\bar{x}_j - \bar{c}) + \alpha \, H(\bar{c} - \bar{m})$

Démonstration

Elle est immédiate à partir de **3.2.4**

$$(Im\ \alpha^j = 0)$$

Remarques

a. La formule **3.2.4** est la correspondante de la formule **2.2.3.1** dans le cas du corps $\mathbb{R}$. C'est la correspondante de la formule classique de LEIBNIZ :

b. Dans le cas de $\mathbb{C}$, nous devons supposer les coefficients α^j ***réels*** pour obtenir une formule de la même forme que celle de LEIBNIZ ;

c. Nous insistons sur le fait que la forme sesquilinéaire est quelconque (à symétrie hermitique ou non).

Théorème 9. *Il existe une bijection entre les formes sesquilinéaires (dites aussi polaires) et les formes hermitiques.*

Démonstration

A la forme sesquilinéaire S correspond la forme hermitique H obtenue en écrivant :

$$H(\overline{x}) = S(\overline{x})(\overline{x})$$

pour tout $\overline{x}$ de E.

A la forme hermitique H, cherchons si nous pouvons faire correspondre une forme polaire (ou sesquilinéaire) S.

Supposons qu'il existe une telle forme S sesquilinéaire. Pour tout couple de vecteurs $\overline{x}$ et $\overline{y}$ de E, nous avons :

$$H(\overline{x} + \overline{y}) = S(\overline{x} + \overline{y})(\overline{x} + \overline{y}) = S(\overline{x})(\overline{x}) + S(\overline{y})(\overline{y}) + S(\overline{x})(\overline{y}) + S(\overline{y})(\overline{x})$$

$$H(\overline{x} + \overline{y}) = H(\overline{x}) + H(\overline{y}) + S(\overline{x})(\overline{y}) + S(\overline{y})(\overline{x})$$

d'où :

$$S(\overline{x})(\overline{y}) + S(\overline{y})(\overline{x}) = H(\overline{x} + \overline{y}) - H(\overline{x}) - H(\overline{y})$$

Prenons ensuite le couple $\overline{x}$ et $i\overline{y}$ de E :

$$S(\overline{x})\ (i\overline{y}) + S(i\overline{y})\ (\overline{x}) = H(\overline{x} + i\overline{y}) - H(\overline{x}) - H(\overline{y})$$

$$i\ S(\overline{x})(\overline{y}) - i\ S(\overline{y})(\overline{x}) = H(\overline{x} + i\overline{y}) - H(\overline{x}) - H(\overline{y})$$

$$\begin{cases} S(\vec{x})(\vec{y}) - S(\vec{y})(\vec{x}) = -\,i\,H(\vec{x} + i\vec{y}) + i\,H(\vec{x}) + i\,H(\vec{y}) \\ S(\vec{x})(\vec{y}) + S(\vec{y})(\vec{x}) = H(\vec{x} + \vec{y}) - H(\vec{x}) - H(\vec{y}) \end{cases}$$

Ajoutons membre à membre :

$$S(\vec{x})(\vec{y}) = \frac{1}{2}\,[H(\vec{x} + \vec{y}) - H(\vec{x}) - H(\vec{y})] - \frac{i}{2}\,[H(\vec{x} + i\vec{y}) - H(\vec{x}) - H(\vec{y})]$$

Nous obtenons ainsi S pour tous $\vec{x}$ et $\vec{y}$ de E. Nous n'avons à faire aucune hypothèse sur la symétrie de S.

Théorème 10. *Soient S une forme sesquilinéaire quelconque (ayant ou non la symétrie hermitique) sur E et H la forme hermitique associée telle que $H(\vec{x}) = S(\vec{x})(\vec{x})$. Pour tous vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$* de E, nous avons :

$$\begin{cases} H(\vec{x} + \vec{y}) = H(\vec{x}) + H(\vec{y}) + S(\vec{x})(\vec{y}) + S(\vec{y})(\vec{x}) \\ H(\vec{x} - \vec{y}) = H(\vec{x}) + H(\vec{y}) - S(\vec{x})(\vec{y}) - S(\vec{y})(\vec{x}) \\ H(\vec{x} + \vec{y}) + H(\vec{x} - \vec{y}) = 2[H(\vec{x}) + H(\vec{y})] \\ H(\vec{x} + \vec{y}) - H(\vec{x} - \vec{y}) = 2[S(\vec{x})(\vec{y}) + S(\vec{y})(\vec{x})] \end{cases}$$

Démonstration

Les deux premières relations s'obtiennent à partir de la définition de H. Les deux dernières s'obtiennent par addition et soustraction des deux premières.

Les deux dernières relations sont les généralisations sur $\mathbb{C}$ de la première et de la deuxième formule de la médiane (paragraphe 2.2.1).

Théorème 11. *Pour tout couple de vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ de E, nous avons l'identité, dite identité de polarisation :*

$$S(\vec{x})(\vec{y}) = \frac{1}{4}\,[H(\vec{x} + \vec{y}) - H(\vec{x} - \vec{y})] + \frac{i}{4}\,[H(\vec{x} - i\vec{y}) - H(\vec{x} + i\vec{y})]$$

Démonstration

Nous utilisons la quatrième formule du théorème précédent en prenant le couple $(\vec{x}, i\vec{y})$:

$$H(\vec{x} + i\vec{y}) - H(\vec{x} - i\vec{y}) = 2[\,i\,S(\vec{x})(\vec{y}) - i\,S(\vec{y})(\vec{x})]$$

Multiplions la quatrième relation du théorème précédent par i :

$$i[H(\vec{x} + \vec{y}) - H(\vec{x} - \vec{y})] = 2i\,[S(\vec{x})(\vec{y}) + S(\vec{y})(\vec{x})]$$

Ajoutons ces deux relations membre à membre et divisons par i :

$$4\,S(\vec{x})(\vec{y}) = H(\vec{x} + \vec{y}) - H(\vec{x} - \vec{y}) + i[H(\vec{x} - i\vec{y}) - H(\vec{x} + i\vec{y})] \quad \text{CQFD.}$$

Remarque

Nous pouvons obtenir S à partir H sans faire aucune hypothèse sur la symétrie de S. Dans le cas de la forme bilinéaire B, *nous avons dû supposer B symétrique* (paragraphe **2.2.2**).

4. CONCLUSIONS, REMARQUES FINALES

Certains théorèmes donnés ici sont classiques. Les théorèmes 2, 3, 9, 10 et 11 peuvent être trouvés dans les références données dans la bibliographie (Théorème 2 *in* référence [2] page 348 ; théorème 3 *in* référence [1] page 81, théorèmes 9-10-11 *in* références [2] pp. 360-361, référence [3] page 257). Mais pour les théorèmes concernant les sommes de formes quadratiques et hermitiques et faisant intervenir le barycentre (théorèmes 1, 4, 5, 6, 7 et 8) qui sont les généralisations de la formule de LEIBNIZ, nous n'avons pas trouvé de références les citant. L'intérêt de considérer le barycentre (qui correspond au centre de masses pour les coefficients α^j *réels positifs* ou les coefficients α^j complexes avec les parties réelles positives et les parties imaginaires petites dans le cas des masses complexes), n'est plus à souligner. La partie imaginaire de la masse complexe correspond à la largeur des raies des résonances par exemple dans une théorie avec masses complexes.

BIBLIOGRAPHIE

(1) LICHNEROWICZ (A.). — *Algèbre et Analyse Linéaire,* Masson et C^{ie}, 2^{e} édition 1956.

(2) CHAMBADAL (L.), OVAERT (J.-L.). — *Algèbre linéaire et Algèbre tensorielle,* édit. Dunod. Paris 1968.

(3) VOIEVODINE (V.). — *Algèbre linéaire,* édition MIR, Moscou, 1976.