ETUDE D'UNE DISTRIBUTION SPHERIQUE UNIFORME DE RAYONNEMENT PUR

Bernard FRUCHIER

Assistant
Centre d'Enseignement Supérieur
B. P. 185 - TULEAR

Résumé :

Nous résolvons les équations de la Relativité Générale d'Einstein dans le cas particulier d'une distribution homogène et isotrope d'énergie électromagnétique à symétrie sphérique. La pression est alors égale à $p_r = \rho_r . c^{2/3}$ à cause de l'isotropie.

Ces calculs peuvent servir d'introduction à l'étude de l'explosion primordiale de l'univers, ainsi qu'à celle de l'effondrement gravitationnel local (novae) à sa limite ultime, lorsque toute l'énergie restante se retrouve sous forme de rayonnement piégé par son propre champ de gravitation. Nous donnons la forme exacte de la métrique et nous calculons la durée propre de l'implosion à partir du repos.

Abstract:

Spherical distribution of radiation in general relativity.

Special exact solution of spherical symmetric gravitational field equations is derived in terms of general relativity in the uniform radiation distribution case where stresses reduce to :

$$p_r = \rho_r \frac{c^2}{3} .$$

This calculation, therefore, can be used in the early «Big Bang» universe study (with reversing the time scale direction), as well as for the local gravitational collapse at his end, when the whole energy is transformed into radiation captured by his own gravitational field.

The total duration of free collapse from rest is thus found.

INTRODUCTION

Notre base de départ est l'équation tensorielle d'Einstein qui relie de façon formelle la géométrie du système décrit à ses caractères physiques. En composantes mixtes, elle s'écrit :

$$\frac{1}{2} \cdot g_{\upsilon}^{\mu} R - R_{\nu}^{\mu} - \Lambda g_{\nu}^{\mu} = \frac{8 \pi f}{c^4} \cdot T_{\upsilon}^{\mu}$$

Cette équation exprime 10 relations. Parmi ces 10 relations, 6 seulement sont indépendantes, le choix du système de référence restant entièrement libre. La symétrie particulière qui apparaît dans notre problème réduira le nombre de relations indépendantes à deux.

Pour résoudre les équations de champs nous utiliserons un système de coordonnées comobiles avec le système physique décrit. Avec un tel système, les composantes mixtes du tenseur impulsion-énergie se réduisent à :

$$T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -p \qquad T_4^4 = \rho \cdot c^2$$

$$T_4^1 = T_1^4 = 0$$

Hypothèses de départ :

Le système que nous étudions est une distribution sphérique d'énergie, continue, homogène, et isotrope. Nous supposons que cette énergie se trouve pratiquement toute sous forme de rayonnement électromagnétique et que la faible partie qui pourrait s'échapper du système est négligeable.

Nous supposons de plus que la densité reste uniforme lorsque le système évolue (contraction homologue). La pression, qui est la pression d'un rayonnement isotrope, est :

$$p_r = \rho_r \cdot c^{2/3}$$

On se propose de chercher la métrique relative à cette distribution, et, si possible, d'exprimer sa partie spatiale en fonction de la coordonnée temps.

Calcul de la métrique.

La forme la plus générale d'une métrique à symétrie sphérique non-statique s'écrit :

$$ds^2 = - e^{\overline{\omega}} dR^2 - e^{\omega} (d\Theta^2 + \sin^2 \Theta \, d\varphi^2) = + e^{\sigma} c^2 d\tau^2$$

où $e^{\overline{\omega}}$, e^{ω}, et e^{σ} représentent des fonctions positives des coordonnées R et τ seulement, à cause de la symétrie sphérique.

A partir de cette métrique, et à l'aide de l'équation tensorielle d'Einstein, on obtient les relations :

$$\text{(a)} \quad \dot{\overline{\omega}} + 2\dot{\omega} = -\frac{2\dot{\rho}c^2}{p+\rho c^2} \qquad \text{(b)} \quad \sigma' = -\frac{2p'}{p+\rho c^2}$$

Ici $p = p_r$ ne dépend que du temps. Donc $p' = 0$ et $\sigma' = 0$

Il s'en suit que $\sigma = \sigma(\tau)$

Avec le changement de variable $dt = e^{\frac{\sigma}{2}} d\tau$ on fait apparaître un temps orthogonal. La métrique s'écrit donc :

$$ds^2 = -e^{\overline{\omega}} dR^2 - e^{\omega}(d\Theta^2 + \sin^2\Theta\, d\varphi^2) + c^2 dt^2$$

A partir de cette nouvelle métrique, et toujours à l'aide de l'équation d'Einstein, on obtient la relation :

$$\text{(c)} \qquad e^{\overline{\omega}} = e^{\omega} \frac{\omega'^2}{4f^2(R)}$$

Si, maintenant, on particularise les coordonnées transversales en posant :

$$e^{\omega} = R^2 S^2(t) \qquad \text{avec } S(t=0) = 1$$

on a :

$$e^{\overline{\omega}} = \frac{S^2(t)}{f^2(R)}$$

La métrique peut donc s'écrire en définitive :

$$\boxed{ds^2 = -S^2(t)\left[\frac{dR^2}{f^2(R)} + R^2 d\Omega^2\right] + c^2 dt^2}$$

en posant $d\Omega^2 = d\Theta^2 + \sin^2\Theta\, d\varphi^2$

Détermination de la fonction $f^2(R)$.

Ecrivons les équations de champ :

$$(1) \quad \frac{8\pi f}{c^4} T_1^1 = e^{-\omega} - e^{-\overline{\omega}} \cdot \frac{\omega'^2}{4} + \frac{1}{c^2}\left[\ddot{\omega} + \frac{3}{4}\dot{\omega}^2\right] \quad \left(= \frac{8\pi f}{c^4} T_2^2 = \frac{8\pi f}{c^4} T_3^3\right)$$

$$(2) \quad \frac{8\pi f}{c^4} T_4^4 = e^{-\omega} - e^{-\overline{\omega}}\left[\omega'' + \frac{3}{4}\omega'^2 - \frac{\overline{\omega}'\omega'}{2}\right] + \frac{1}{c^2}\left[\frac{\dot{\omega}^2}{4} + \frac{\dot{\overline{\omega}}\dot{\omega}}{2}\right]$$

On va faire apparaître dans ces équations les fonctions $f^{-}(R)$ et $S^2(t)$:

$$(1) \rightarrow \frac{8\pi f}{c^4} T_1^1 = \frac{1}{R^2 S^2} - \frac{f^2}{S^2} \cdot \frac{1}{R^2} + \frac{1}{c^2}\left[2\,\frac{S\ddot{S} - \dot{S}^2}{S^2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{4\dot{S}^2}{S^2}\right]$$

Après arrangement, on a, en posant $f^2 = 1 + f_1$:

$$\frac{8f}{c^4} T_1^1 = \frac{R^2(2S\ddot{S} + \dot{S}^2) - c^2 f_1}{R^2 S^2}$$

Soit, avec $T_1^1 = -p_r = -\dfrac{\rho r c^2}{3}$.:

$$(1') \qquad \boxed{\frac{R^2(2S\ddot{S} + \dot{S}^2) - c^2 f_1}{R^2 S^2} = -\frac{8\pi f}{3}\rho_r}$$

Quand à l'équation (2) elle s'écrit :

$$(2) \rightarrow \frac{8\pi f}{c^4} T_4^4 = \frac{1}{R^2 S^2} - \frac{1+f_1}{S^2}\left[-\frac{2}{R^2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{R^2} + \frac{f'_1}{R(1+f_1)}\right] + \frac{1}{c^2}\left[\frac{\dot{S}^2}{S^2} + 2\,\frac{\dot{S}^2}{S^2}\right]$$

Après arrangement, et avec $T_4^4 = \rho_r \cdot c^2$ on a :

$$(2') \qquad \boxed{\frac{3R^2\dot{S}^2 - c^2(f_1 + Rf'_1)}{S^2 R^2} = 8\pi f \cdot \rho_r}$$

L'équation (1') peut encore s'écrire :

$$\underbrace{c^2\,\frac{f_1}{R^2}}_{K_1} = \underbrace{S^2\left[\frac{2S\ddot{S} + \dot{S}^2}{S^2} + \frac{8\pi f}{3}\rho_r\right]}_{K_2.}$$

Le premier membre de cette relation est uniquement une fonction de R, le second membre uniquement une fonction de t, puisque ρ_r n'est fonction que de t.

Par conséquent $K_1(R) = K_2(t) = Cte = \beta c^2$

donc $c^2 \dfrac{f_1}{R^2} = \beta c^2$ ce qui donne $f_1(R) = \beta \cdot R^2$

L'équation (1') s'écrit maintenant :

$$\boxed{\frac{2S\ddot{S} + \dot{S}^2 - \beta c^2}{S^2} = -\frac{8\pi f}{3}\rho_r}$$

et l'équation (2') :

$$\boxed{\frac{\dot{S}^2 - \beta c^2}{S^2} = -\frac{8\pi f}{3}\rho_r}$$

Ces deux équations permettent de déterminer la fonction S(t) :

Détermination de la fonction S (t).

On constate immédiatement que (1') + (2') = 0

c.à.d. $$\frac{2S\ddot{S} + \dot{S}^2 - \beta c^2}{S^2} + \frac{\dot{S}^2 - \beta c^2}{S^2} = 0$$

ce qui donne $$2S\ddot{S} + 2\dot{S}^2 - 2\beta c^2 = 0$$

soit : $$\boxed{S\ddot{S} + \dot{S}^2 = \beta c^2}$$

On résoud facilement cette équation différentielle.

Remarquons que $$[S\dot{S}] = S\ddot{S} + \dot{S}^2$$

On a donc $[S\dot{S}] = \beta c^2$. En intégrant une première fois :

$$S\dot{S} = \beta c^2 \cdot t + C_1$$

Or $\quad S\dot{S} = \frac{1}{2}\,[\dot{S^2}] \qquad$ d'où $\qquad [\dot{S^2}] = 2\beta c^2 \,.\, t + 2C_1$

En intégrant encore :

$$S^2(t) = \beta c^2 \,.\, t^2 + 2C_1 \,.\, t + C_2$$

Si pour $t = 0$ on a $S = 1$, il faut $C_2 = 1$

Supposant de plus que le système évolue à partir d'un état de repos, c'est-à-dire si :

$$\dot{S}(t = 0) = 0, \qquad \text{il faut} \qquad C_1 = 0$$

En définitive :

$$\boxed{S(t) = \boxed{1 + \beta c^2 \,.\, t^2}^{\,1/2}}$$

Calcul de β :

De $S\dot{S} = \beta c^2 \,.\, t$ on tire $\quad \dot{S} = \dfrac{\beta c^2 \,.\, t}{S} = \dfrac{\beta c^2 \,.\, t}{[1 + \beta c^2 \,.\, t^2]^{1/2}}$

En portant ces expressions de S et $\dot{S}$ dans l'équation (2') on obtient :

$$\frac{8\pi f}{3}\rho_r = \frac{\dot{S}^2 - \beta c^2}{S^2} = -\frac{\beta c^2}{[1 + \beta c^2 \,.\, t^2]^2}$$

Si $\rho_r = \rho_0$ lorsque $t = 0$ on a :

$$\frac{8\pi f}{3}\rho_0 = -\beta c^2 \qquad \text{soit} \qquad \beta = -\frac{8\pi f}{3c^2}\rho_0$$

La métrique est maintenant entièrement définie.

Durée propre de l'implosion :

Des calculs précédents,on tire $\qquad \rho_r = \rho_0\left[1 - \dfrac{8\pi f \rho_0}{3} \,.\, t^2\right]^{-2}$

soit $\rho_r \,.\, S^4 = Cte = \rho_0$

(Alors que dans le cas d'une distribution uniforme de matière on a :

$$\rho_m \,.\, S^3 = Cte \,)$$

On aura $\rho_r = \infty$ $(S = 0)$ lorsque $1 - \dfrac{8\pi f \rho_0}{3} \,.\, t^2 = 0$

soit
$$\boxed{t = \left[\frac{3}{8\pi f \rho_0}\right]^{1/2}}$$

Durée propre correspondant à la disparition du système pour un observateur extérieur.

Appelons r_1 la coordonnée radiale de Schwarzschild correspondant à la limite de la sphère vue de l'extérieur.

Soit R_1 la coordonnée comobile correspondante.

On a : $r_1 = R_1 \,.\, S(t)$ t étant le temps mesuré par un observateur comobile. Au temps $t = 0$ on a $r_1 = R_1$.

Lorsque r_1 atteint la valeur $r_0 = \dfrac{2fM}{c^2}$ (rayon gravitationnel), le système atteint l'horizon du visible pour un observateur extérieur. En effet, à ce moment là tout rayon issu du système subit un décalage spectral gravitationnel vers le rouge infini.

Si on appelle t_i le temps propre correspondant on a :

$$r_0 = R_1 \,.\, S(t_i)$$

soit
$$\left[\frac{r_0}{R_1} = 1 + \beta c^2 \,.\, t_i^2 \quad {}^{1/2}\right]$$

ce qui donne en définitive :

$$t_i = -\left(\beta c^2\right)^{-1/2} . \left[1 - \frac{r_0^2}{R_1^2}\right]^{1/2}$$

ou encore
$$\boxed{t_i^2 = t_0^2 - \frac{r_0 R_1}{c^2}}$$

BIBLIOGRAPHIE

EINSTEIN A. La théorie de la relativité restreinte et générale. La relativité et le problème de l'espace.
Paris, Gauthier-Villars, 1921.

CARTAN E. Leçon sur les invariants intégraux.
Paris, Hermann, 1922.

TOLMAN R.C. Relativity, thermodynamics, and cosmology.
Oxford, Clarendon Press, 1934.

OPPENHEIMER J.R., SNYDER H. On continued gravitational contraction.
Phys. Rev. 56, p. 455, 1939.

BUCHDAHL H.A. General relativistic fluid spheres.
Phys. Rev. 116, p. 1027, 1959.

HOYLE F., FOWLER W.A., BURBIGE E.M. On relativistic astrophysics.
Ap. J. 139, p. 909, 1964.

Mc VITTIE G.C. Gravitational collapse to a small volume.
Ap. J. 140, p. 401, 1964.

Mc VITTIE G.C. An exemple of gravitational collapse in General Relativity.
Ap. J. 143, p. 682, 1966.

THORNE K.S. Gravitational collapse.
S.A. 217, 5, p. 88, 1967.

Mc VITTIE G.C., STABELL R. Spherically symmetric non-statical solutions of Einstein's equations.
Ann. Inst. Henri Poincaré VII, p. 103, 1967.

THOMPSON I.H., WHITROW G.Y. Time-dependent internal solution for spherically symmetrical bodies in General Relativity.
M.N. 136, p. 207, 1967.
M.N. 139, p. 499, 1968.

ANDRILLAT H. Introduction à l'étude des cosmologies. (éditeur, année)

FRUCHIER B. L'espace à symétrie sphérique en Relativité Générale et le collapse gravitationnel.
Montpellier, Thèse de spécialité, 1970.

ISRAEL W. Event horizon and gravitational collapse.
G.R. & grav. 2, p. 53, 1971.