LA CONTRACTION GRAVITATIONNELLE EN MECANIQUE CLASSIQUE

Bernard FRUCHIER

Assistant
Centre d'Enseignement Supérieur
B. P. 185 - TULEAR

Résumé :

Dans le présent article, nous décrivons le phénomène de l'implosion d'une distribution de matière à symétrie sphérique uniquement à l'aide de la mécanique classique et de la loi d'attaction universelle de Newton. Nous calculons les paramètres géométriques du système au cours de son évolution et la durée de l'implosion à partir du repos.

Abstract:

Gravitational collapse in classical mechanics

In the present paper, we describe the implosion phenomenon of spherically uniform distribution of matter, only in terms of newtonian mechanics with newtonian gravitation law. We express a geometrical parameter S as metric factor. and then deduce the total duration of the free collapse from rest.

Nous considérons une distribution sphérique de matière et nous supposons qu'à l'instant $t = 0$ toutes les vitesses sont nulles par rapport au centre de symétrie. Nous supposons de plus qu'à cet instant la densité est uniforme et égale à ρ_0.

Si aucune force interne de pression ne vient équilibrer les forces de gravitation, le système commence à se contracter.

Dans les calculs qui suivent, nous supposons que la pression interne est nulle et reste nulle. Cette hypothèse, justifiée dans l'étude des cosmologies, sera valable tant que les dimensions des particules constituant notre matière pourront être considérées comme infiniment petites vis-à-vis de celles du système dans son ensemble, ces particules n'ayant aucune interaction entre elles et étant supposées dépourvues d'agitation thermique au départ. L'énergie potentielle de gravitation est alors transformée intégralement en énergie cinétique de translation rectiligne vers le centre de l'implosion. Il n'y a donc pas élévation de température et la pression reste nulle.

Nous montrons tout d'abord que la contraction est homologue : une contraction est homologue si la distribution de matière reste semblable à elle-même au cours du temps. La densité uniforme à l'instant initial reste uniforme lorsque le système évolue, et la vitesse relative de deux particules quelconques est proportionnelle à leur distance mutuelle (analogie avec la loi de Hubble). Ce fait se démontre facilement en considérant au sein de notre système une sphère élémentaire de centre 0' quelconque. Si l'on se place dans le système de référence accéléré attaché à 0' et si l'on considère le mouvement d'une particule située à la surface de la sphère élémentaire, on déduit de la théorie des champs newtoniens que ce mouvement ne dépend que de la masse située à l'intérieur de celle-ci. Le point 0' étant quelconqueé l'évolution de la sphère élémentaire ne dépend pas de sa position et, en particulier, la densité reste uniforme.

Etude quantitative de l'évolution.

Soit R le rayon de la sphère et $R = R_0$ sa valeur initiale. Puisque la contraction est homologue, une particule de masse m située à la surface est attirée vers le centre par une masse constante qui est la masse totale de la sphère (moins m que l'on négligera) ; cette masse est :

$$M = \frac{4}{3} \pi \rho_0 R_0^3$$

L'équation de mouvement de cette particule s'écrit à partir de la loi d'attraction universelle de Newton :

$$f \frac{m.M}{R^2} = -m \frac{d^2R}{dt^2}$$

Ceci peut s'écrire : $$-fM \frac{dt}{dR} \cdot \frac{d}{dR} \left[\frac{1}{R}\right] = \frac{d}{dt} \left[\frac{dR}{dt}\right]$$

ou encore, avec $V = \frac{dR}{dt}$: $$-fM \frac{d}{dR} \left[\frac{1}{R}\right] = V. \frac{dV}{dt}$$

En intégrant : $$V^2 = \frac{2fM}{R} + C_1$$

Par hypothèse $V = 0$ lorsque $R = R_0$ d'où $C_1 = -\frac{2fM}{R_0}$

On a donc : $$\boxed{V^2 = 2fM \left[\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0}\right]} \qquad (1)$$

Pour obtenir $R(t)$ il nous faut intégrer une nouvelle fois .

L'équation (1) peut s'écrire : $\frac{dR}{dt} = - \sqrt{2fM} \left[\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0}\right]^{1/2} (V = O)$

Séparant les variables : $$\frac{dR}{\sqrt{\frac{R_0}{R} - 1}} = -\sqrt{\frac{2fM}{R_0}} \; . \; dt$$

Posons $\frac{R_0}{R} = 1 + tg^2\, \alpha$. L'équation ci-dessus devient :

$$2R_0 \cos^2 \alpha \, d\alpha = \sqrt{\frac{2fM}{R_0}} \; . \; dt$$

L'intégrale de cette équation est :

$$2R_0 \left[\frac{\alpha}{2} + \frac{\sin 2\alpha}{4}\right] = \frac{2fM}{R_0} \; . \; t + C_2$$

Et, en remplaçant α par sa valeur :

$$R_0 \left[\text{arc tg} \sqrt{\frac{R_0}{R} - 1} + \frac{1}{2} \sin 2(\text{arc tg} \sqrt{\frac{R_0}{R} - 1}) \right] = \sqrt{\frac{2fM}{R_0}} \; . \; t + C_2$$

Puisque $R = R_0$ lorsque $t = 0$ il faut $C_2 = 0$

Simplifions l'expression précédente :

On a : $\sin 2a = 2 \sin a \cos a = 2 \cos^2 a \frac{\sin a}{\cos a} = 2 \cos^2 a \; tg\, a = \frac{2\, tg\, a}{1 + tg^2 a}$

d'où : $$\sin 2\, (\text{arc tg}\, u) = \frac{2u}{1 + u^2}$$

Nous obtenons donc :

$$R_0 \left[\text{arc tg} \sqrt{\frac{R_0}{R} - 1} + \frac{R}{R_0} \; . \; \sqrt{\frac{R_0}{R} - 1} \right] = \sqrt{\frac{2fM}{R_0}} \; . \; t$$

et, en posant $\dfrac{R}{R_0} = S$: $(S = 1$ lorsque $t = 0)$

$$\boxed{R_0 \left[\arc\cos\sqrt{S} + \sqrt{S(1-S)}\right] = \sqrt{\frac{2fM}{R_0}} \cdot t} \qquad (2)$$

Cette équation donne implicitement le rayon $R = R_0\,S(t)$ de la sphère matérielle en fonction du temps.

Durée de la contraction à partir du repos.

La contraction est géométriquement terminée lorsque le rayon de la sphère est nul : $R = 0$ est équivalent à $S = 0$.

La durée T de la contraction est donc définie par :

$$\sqrt{\frac{2fM}{R_0}} \cdot T = R_0\,\frac{\pi}{2} \qquad \text{soit} \qquad T = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{R_0^3}{2fM}}$$

Finalement, en fonction de ρ_0 nous avons : $\boxed{T = \dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{3}{8\pi f \rho_0}}}$

Nous remarquerons que ce résultat est exactement celui obtenu par Mc Vittie en Relativité Générale (Mc Vittie G.C. 1966)

REMARQUE :

L'expression de la vitesse est $$V^2 = 2fM\left[\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0}\right]$$

Nous pouvons calculer à titre de curiosité la valeur R_c de R pour laquelle $V=c$ (en remarquant toutefois que la vitesse c n'a aucune signification particulière en méca - nique newtonienne) :

On a $$c^2 = 2fM\left[\frac{1}{R_c} - \frac{1}{R_0}\right] \qquad \text{soit} \qquad \frac{1}{R_c} = \frac{c^2}{2fM} + \frac{1}{R_0}$$

Si au départ la masse finie M était répartie dans une sphère de rayon R_0 très grand (infini à la limite) avec une densité très petite (nulle à la limite), on aurait :

$$R_c = \frac{2fM}{c^2} = r_0 \quad \text{rayon de Schwarzschild de la Relativité Générale.}$$

*

* *

BIBLIOGRAPHIE

BONNOR W. B. Expanding newtonian universe. M.N. 1957, 117, p. 104.

HUNTER C. The instability of the collapse of a self-gravitating cloud. Ap. J. 1962, 136, p. 594.