Sciences de la Nature et Mathématiques, N° 11, 1974

DE LA DEFINITION INTRINSEQUE DES TENSEURS ET DE SON UTILISATION PRATIQUE EN CALCUL TENSORIEL – CHANGEMENTS DE BASE

par RAOELINA ANDRIAMBOLOLONA
et RAMIARAMANANA Désiré

Laboratoire de Physique
Etablissement d'Enseignement Supérieur des
Sciences
Université de Madagascar (Madagascar)

Résumé :

Nous donnons une méthode pratique d'utilisation de la formulation intrinsèque des tenseurs moyennant l'adoption de conventions d'écriture que nous indiquons. Ces dernières sont d'ailleurs tout à fait naturelles car elles ne sont que les généralisations du Calcul Matriciel habituel. Nous illustrons la méthode en étudiant le problème classique des changements de base pour les vecteurs, les covecteurs et les tenseurs.

Abstract :

Owing to the adoption of writing conventions we indicate, an useful and practical method is derived from the intrinsic formulation of tensors. The conventions may be easily understood because they are a generalization of the usual matrix calculus. The method is illustrated by the study of vector and tensor transformation induced by a basis transformation.

Dans la pratique, les tenseurs se présentent comme étant des «êtres» munis de plusieurs indices possédant certaines propriétés de transformation. Par exemple, en Physique, en Mécanique, etc... on définit un vecteur, un tenseur d'après leurs propriétés de transformation dans un changement de base. S'il est vrai que c'est sous cet aspect que se présentent les vecteurs et les tenseurs, garder cette définition pratique présente toutefois des inconvénients qui sont ceux liés aux définitions non intrinsèques. En effet, comme la définition est faite à partir d'une base, les démonstrations des propriétés doivent évidemment se référer à une base; et il est parfois difficile de distinguer les propriétés qui sont liées à la base et celles qui ne le sont pas. Il peut arriver que l'utilisation d'une base masque certaines propriétés. Ainsi, dans un espace euclidien (hermitique), il est bien connu qu' :

— un opérateur orthogonal (unitaire) n'est représenté par une matrice orthogonale (unitaire) que si *la base choisie est orthonormée,*

— un opérateur symétrique (hermitique) n'est représenté par une matrice symétrique (hermitique) que si la *base choisie est orthonormée.*

La formulation intrinsèque (donc ne se référant à aucune base) présente l'avantage de mettre immédiatement en évidence les propriétés intrinsèques tout en contenant, implicitement bien entendu, les propriétés qu'on peut déduire lors de l'utilisation d'une base quelconque. Il s'avère parfois difficile de la relier au calcul matriciel et tensoriel ; de même, les composantes qu'utilisent les praticiens du calcul matriciel et tensoriel semblent ne pas présenter beaucoup d'intérêt dans l'étude intrinsèque. Pourtant, beaucoup de calculs en Physique, en Mécanique etc... gagneraient beaucoup de simplification dans une formulation intrinsèque.

Le présent travail utilise, dès le départ, la formulation intrinsèque. Nous déduisons de celle-ci les formules de transformation des composantes. Nous montrons qu'il est possible de représenter les tenseurs affines d'ordre p construit sur un espace vectoriel de dimension n (donc ayant n^p composantes) ainsi que les opérateurs multilinéaires par des tableaux (matrices-lignes, matrices colonnes, matrices) pour lesquels les règles ordinaires du calcul Matriciel sont applicables, moyennant certaines règles qu'il faut observer, à savoir :

— les composantes d'un tenseur covariant dans une base (c'est-à-dire avec des indices en position *basse)* seront représentées par une matrice - ligne.

— les composantes d'un tenseur contravariant dans une base (c'est-à-dire avec des indices en position *haute*) seront représentées par une matrice - colonne.

— les composantes d'un tenseur mixte dans une base (c'est-à-dire avec des indices en position *haute* et *basse*) seront représentées par une matrice au sens élémentaire de ce mot.

— la multiplication à employer est celle du Calcul Matriciel habituel (Ligne-Colonne)

Ces conventions, qui semblent être arbitraires à première vue, ne sont que les généralisations directes de celles utilisées dans le cas de l'Algèbre Linéaire.
En effet, en Algèbre Linéaire, quand on choisit une base $(e_i) i = (1,...n)$ de l'espace vectoriel E_n, le vecteur $\overline{X} \in E$ peut être représenté de façon biunivoque par la matrice colonne $\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^n \end{bmatrix}$ où les x^i sont les composantes de $\overline{X}$ sur $\overline{e}_i$: $\overline{X} = x^i \overline{e}_i$. Une forme linéaire (un covecteur) $\underset{\sim}{\phi}$ de l'espace dual E^* peut être représentée de façon biunivoque par la matrice-ligne : $[\ \phi_1\ \phi_2\ ...\phi_n\ ]$ où les ϕ_i sont les composantes de $\underset{\sim}{\phi}$ définies par $\underset{\sim}{\phi} = \phi_i\ \underline{\mathcal{E}}^i$, $\underline{\mathcal{E}}^i$ désignant la base duale . De même, nous faisons remarquer que les relations $\overline{X} = x^i\ \overline{e}_i$ et $\underset{\sim}{\phi} = \phi_i\ \underline{\mathcal{E}}^i$ peuvent être écrites sous les formes :

$$\overline{X} = [\ \overline{e}_1\ \overline{e}_2\ \ ......\ \overline{e}_n\ ] \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^n \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\phi} = [\ \phi_1\ \ \phi_2\ \ ......\ \phi_n] \begin{bmatrix} \mathcal{E}^1 \\ \mathcal{E}^2 \\ \mathcal{E}^h \end{bmatrix}$$

pour lesquelles il faut utiliser la multiplication matricielle ligne - colonne habituelle
Nous généralisons cette écriture en remarquant que :

— l'espace vectoriel E peut être confondu avec l'espace $E^{\otimes 1}$ (espace des tenseurs contravariants d'ordre 1)

— l'espace dual E^* peut être confondu avec l'espace $E^{* \otimes 1}$ (espace des tenseurs covariants d'ordre 1)

— un opérateur linéaire de E peut être considéré comme un tenseur mixte d'ordre deux une fois covariant une fois contravariant (c.f. Appendice).

Nous pouvons resumer les conventions de la façon suivante :

— tout ce qui a un indice en position *basse* (que ce soit un vecteur de base de E, ou que ce soient les composantes d'un covecteur ou d'un tenseur covariant) est représenté par une *matrice - ligne*.

— tout ce qui a un indice en position *haute* (que ce soit un vecteur de base de E*, ou que ce soient les composantes d'un vecteur ou d'un tenseur contravariant) est représenté par une *matrice - colonne*.

Ces conventions sont d'ailleurs des conséquences directes de la convention de sommation d'Einstein.

Nous soulignons leur intérêt pour l'étude des changements de base pour les vecteurs, tenseurs ainsi que pour leurs composantes. Leur utilisation rend inutile l'introduction de matrice transposée lors de changement de base et évite ainsi tout risque d'erreur. Elles s'avèrent être très commodes pour la recherche pratique des lois de transformations des composantes d'un tenseur lors d'un changement de base. On peut aisément s'en convaincre en faisant les calculs effectifs surtout dès que l'ordre des tenseurs devient élevé.

Dans un travail ultérieur, nous donnerons des applications pratiques de la méthode de calculs développée ici dans des cas précis de la Physique Théorique (équation de Dirac, transformation de Fiercz).

1 — CHANGEMENT DE BASE DANS E.

Soient $\bar{e}_i$ et $\bar{e}_{'i}$ deux bases de E. Le changement de base est défini par :

(1.1) $\boxed{\bar{e}_{'i} = S_{'i}^{\,j}\, \bar{e}_j}$ ou $\boxed{\bar{e}_i = \sigma_{\,i}^{'k}\, \bar{e}_{'k}}$

Les matrices $[\,S\,] = [\,S_{'i}^{\,j}\,]$ et $[\,\sigma\,] = [\,\sigma_{\,i}^{'k}\,]$ sont reliées par $[\,S\,] = [\,\sigma\,]^{-1}$ (ou $[\,\sigma\,] = [\,S\,]^{-1}$). La matrice S est nécessairement régulière.

Conventions adoptées

Nous adoptons dans toute la suite les conventions suivantes :

a — Nous faisons la convention d'Eistein : nous sommons sur les indices égaux placés en position haute et en position basse. Par exemple :

$$\bar{e}_{'i} = S_{'i}^{\,j}\, \bar{e}_j \qquad \text{signifie} \qquad \bar{e}_{'i} = \sum_{j=1}^{n} S_{'i}^{\,j}\, \bar{e}_j$$

si n est la dimension de E.

b — Nous surlignons les vecteurs de E et nous *soulignons* les formes linéaires (ou les covecteurs), éléments de l'espace dual E* de E.
Nous étendrons cette convention aux tenseurs : nous surlignons les tenseurs contravariants et soulignons les tenseurs covariants.

c — Tout indice en position supérieure est une indice de ligne ; tout indice en position inférieure est un indice de colonne, sauf contre - indication. Ainsi, l'ensemble $(\,\bar{e}_i\,)$ des vecteurs de base de E pourra s'écrire : $(\,\bar{e}_{\,i}^{\,1}\,)$ est représenté par la matrice ligne : $[\,\bar{e}_1\ \bar{e}_2\ \ldots\ldots \bar{e}_n\,]$ tandis que l'ensemble des covecteurs $\underline{\varepsilon}^i$ de la base duale sera représenté par la matrice colonne $\begin{bmatrix} \underline{\varepsilon}^1 \\ \underline{\varepsilon}^2 \\ \varepsilon^n \end{bmatrix}$

Pour la matrice $[\,S_{\,j}^{\,i}\,]$, i est donc l'indice de ligne, et j l'indice de colonne.

On peut prendre une convention un peu plus générale ; savoir, tout indice placé en *première* position inférieure ou supérieure est un indice de ligne, tout indice placé en *deuxième* position inférieure ou supérieure est un indice de colonne. Ainsi, nous devons écrire : $S_{\,j}^{\,i} = S^{\,i\,\bullet}_{\,\bullet\,j}$; $\bar{e}_i = \bar{e}^{\,1\,\cdot}_{\,\cdot\,i}$ Mais nous n'avons pas besoin de cette convention générale dans tout ce travail.

d — La multiplication des matrices est la multiplication par la règle classique Ligne par Colonne [LICO] .

Avec ces conventions, qui somme toute sont évidentes par elles-mêmes, nous pouvons écrire la relation (1.1) sous la forme

$$(1.2) \qquad [\,\bar{e}'_1\ \bar{e}'_2\ \ldots,\bar{e}'_n\,] = [\,\bar{e}_1\ \bar{e}_2\ \ldots\ \bar{e}_n\,]\ [\,S\,]$$

en représentant les $(\bar{e}'_i)$ et les $(\bar{e}_i)$ par des matrices lignes (les indices i sont en bas) Pour les composantes x^i d'un vecteur $\overline{X} \in E$, nous avons les relations :

$$(1.3) \qquad \overline{X} = x^i\,\bar{e}_i = x'^i\,\bar{e}'_i$$

En remplaçant $(\bar{e}'_i)$ par son expression (1.1) en fonction de $\bar{e}_i$ et en utilisant le fait que les $(\bar{e}_i)$ forment une base, nous pouvons déduire immédiatement :

$$\overline{X} = x^i\,\bar{e}_i = x'^k\ S'^i_k\,\bar{e}_i$$

$$(1.4) \qquad x^i = x'^k\,S'^i_k = S'^i_k\,x'^k$$

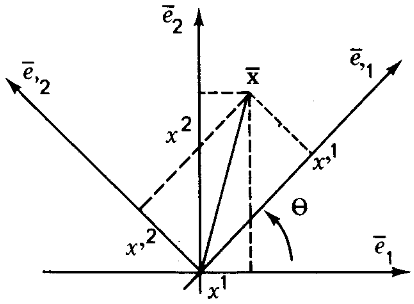
Conformement aux conventions, les (x^i) et (x'^i) sont représentés par les matrices colonnes :

$$(1.5) \qquad \overline{X} = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^n \end{bmatrix} \qquad \overline{X}' = \begin{bmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ x'^n \end{bmatrix}$$

et la relation (1.4) s'écrit :

$$(1.6) \qquad \boxed{\overline{X} = [\,S\,]\ \overline{X}'}$$

Exemple : Considérons l'espace euclidien à deux dimensions et les deux vecteurs de base orthonormés tel que l'angle $(\bar{e}_1, \bar{e}'_1) = \theta + 2k\pi$



Par définition du Sinus et du Cosinus, nous avons :

$$\bar{e}'_1 = \cos\theta\ \bar{e}_1 + \sin\theta\ \bar{e}_2$$

$$\bar{e}'_2 = -\sin\theta\ \bar{e}_1 + \cos\theta\ \bar{e}_2$$

Nous pouvons écrire :

$$[\,\bar{e}'_1\ \bar{e}'_2\,] = [\,\bar{e}_1\ \ \bar{e}_2\,] \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= [\,\bar{e}_1\ \bar{e}_2\,]\ [\,S\,]$$

où $\qquad [\,S\,] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

(remarquer la place de [S]!...)

Pour un vecteur $\overline{X}$ quelconque nous avons :

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= x'^1 \, \overline{e}'_1 + x'^2 \, \overline{e}'_2 \\
&= x'^1 \, (\operatorname{Cos}\theta \, \overline{e}_1 + \operatorname{Sin}\theta \, \overline{e}_2) + x'^2 \, (-\operatorname{Sin}\theta \, \overline{e}_1 + \operatorname{Cos}\theta \, \overline{e}_2) \\
&= (x'^1 \operatorname{Cos}\theta - x'^2 \operatorname{Sin}\theta) \, \overline{e}_1 + (x'^1 \operatorname{Sin}\theta + x'^2 \operatorname{Cos}\theta) \, \overline{e}_2 \\
&= x^1 \, \overline{e}_1 + x^2 \, \overline{e}_2
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} x^1 = \operatorname{Cos}\theta \, x'^1 - \operatorname{Sin}\theta \, x'^2 \\ x^2 = \operatorname{Sin}\theta \, x'^1 + \operatorname{Cos}\theta \, x'^2 \end{cases}$$

Nous pouvons écrire sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{Cos}\theta & -\operatorname{Sin}\theta \\ \operatorname{Sin}\theta & \operatorname{Cos}\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{bmatrix}$$

soit : $\overline{X} = [\,S\,]\,\overline{X}'$ (remarquer la place de S !...)

où : $\overline{X} = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix}$ $\overline{X}' = \begin{bmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{bmatrix}$

Remarquons que nous pouvons écrire la relation (1.3) sous la forme :

$$\overline{X} = [\, \overline{e}_1 \, \overline{e}_2 \, \ldots\ldots \overline{e}_n \,] \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^n \end{bmatrix}$$

Nos conventions ont remplacé la transposition de la matrice S dans la méthode habituelle de changement de base par sa position dans la multiplication du calcul matriciel ligne-colonne.

2 – CHANGEMENT DE BASE INDUIT DANS L'ESPACE DUAL E* PAR LE CHANGEMENT DE BASE (1.1) DE E.

Soient ($\underline{\varepsilon}^i$) la base duale dans E* de ($\overline{e}_i$) de E, et ($\underline{\varepsilon}'^i$) la base duale dans E* de ($\overline{e}'_i$) de E. Par définition de la base duale, nous avons :

$$\underline{\varepsilon}^i \, (\overline{e}_j) = \delta^i_j$$

$$\underline{\varepsilon}'^i \, (\overline{e}'_j) = \delta^i_j$$

où δ^i_j est le symbole de Kronecker $= \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Le changement de base (1.1) dans E induit dans l'espace dual une transformation que nous allons chercher.

Prenons la valeur de $\underline{\varepsilon}^\ell$ pour le vecteur $\overline{e}'_j = S^k_{'j} \, \overline{e}_k$:

$$\begin{aligned}
\underline{\varepsilon}^\ell \, (\overline{e}'_j) &= \underline{\varepsilon}^\ell \, (S^k_{'j} \, \overline{e}_k) \\
&= S^k_{'j} \, \underline{\varepsilon}^\ell \, (\overline{e}_k) \qquad \text{(par linéarité)}
\end{aligned}$$

$$= S_{,j}^{k}\, \delta^{\ell}_{\ k} \qquad \text{(par définition de la base duale)}$$

$$= S_{,j}^{\ell}$$

Nous obtenons une nouvelle signification de $S_{,i}^{k}$

(2.1) $$\boxed{S^{k}_{\ ,i} = \underline{\varepsilon}^{k}\,(\bar{e}_{,i})}$$

Quant à $\sigma_{i}^{\ 'k}$, il est égal à :

(2.2) $$\boxed{\sigma_{i}^{\ 'k} = \underline{\varepsilon}^{'k}\,(\bar{e}_{i})}$$

Remarque :

Nous avons :

$$\underline{\varepsilon}^{'a}\,(\bar{e}_{,b}) = \delta^{a}_{\ b} \qquad \text{par définition}$$

$$\underline{\varepsilon}^{'a}\,(S_{,b}^{k}\,\bar{e}_{k}) = \delta^{a}_{\ b} \qquad \text{(à cause de 1.1)}$$

$$S_{,b}^{\ k}\,\underline{\varepsilon}^{'a}\,(\bar{e}_{k}) = \delta^{a}_{\ b} \qquad \text{(par linéarité)}$$

$$S_{,b}^{\ k}\,\sigma^{\ 'a}_{\ \ k} = \delta^{a}_{\ b} \qquad \text{(à cause de 2.2)}$$

soit $[\,S\,][\,\sigma\,] = I$, ce qui exprime le fait que $[\,S\,]$ et $[\,\sigma\,]$ sont inverses l'un de l'autre.

2.1 — Changement de base induit par (1.1) pour les bases duales.

Appelons $[\,A^{k}_{\ i}\,] = [A]$ la matrice de transformation induite par la transformation (1.1) . Nous avons :

(2.3) $$\underline{\varepsilon}^{'k} = A^{'k}_{\ell}\,\underline{\varepsilon}^{\ell}$$

Prenons la valeur de ces deux membres pour le vecteur de base $\bar{e}_i$:

$$\underline{\varepsilon}^{'k}\,(\bar{e}_i) = A^{'k}_{\ell}\,\underline{\varepsilon}^{\ell}\,(\bar{e}_i)$$

$$= A^{'k}_{\ell}\,\delta^{\ell}_{\ i} \qquad \text{car } \underline{\varepsilon}^{\ell}\,(\bar{e}_i) = \delta^{\ell}_{\ i}$$

$$\underline{\varepsilon}^{'k}\,(\bar{e}_i) = A^{'k}_{i}$$

Or d'après la relation (2.2) , le premier membre est égal à $\sigma^{'k}_{i}$, d'où :

$$A^{'k}_{i} = \sigma^{'k}_{i} \qquad [\,A\,] = [\,\sigma\,] = [\,S\,]^{-1}$$

(2.4) $\quad \underline{\varepsilon}'^{k} = \sigma'^{k}_{\ell}\, \underline{\varepsilon}^{\ell}$

soit en utilisant les conventions ci-dessus :

(2.5) $$\begin{bmatrix} \underline{\varepsilon}'^{1} \\ \underline{\varepsilon}'^{2} \\ \vdots \\ \underline{\varepsilon}'^{n} \end{bmatrix} = [\,S\,]^{-1} \begin{bmatrix} \underline{\varepsilon}^{1} \\ \underline{\varepsilon}^{2} \\ \vdots \\ \underline{\varepsilon}^{n} \end{bmatrix}$$

ou encore :

(2.6) $$\begin{bmatrix} \underline{\varepsilon}^{1} \\ \vdots \\ \underline{\varepsilon}^{2} \\ \underline{\varepsilon}^{n} \end{bmatrix} = [\,S\,] \begin{bmatrix} \underline{\varepsilon}'^{1} \\ \vdots \\ \underline{\varepsilon}'^{2} \\ \underline{\varepsilon}'^{n} \end{bmatrix}$$

Exemple : Etudions par ce formalisme les changements induits dans E* par le changement de base de E suivant : soient $[\,\overline{e}_1\ \overline{e}_2\ \ldots\ldots \overline{e}_n\,]$ la base initiale et la nouvelle base adoptée étant égale à

$$[\,\overline{e}_1 \quad \overline{e}_2 \quad \overline{e}_i \qquad \lambda\overline{e}_i + \overline{e}_j \quad \overline{e}_j \ldots\ldots \overline{e}_n\,]$$

Nous avons : $$\begin{bmatrix} \underline{\varepsilon}'^{1} \\ \underline{\varepsilon}'^{2} \\ \vdots \\ \underline{\varepsilon}'^{n} \end{bmatrix} = [\sigma] \begin{bmatrix} \underline{\varepsilon}^{1} \\ \underline{\varepsilon}^{2} \\ \vdots \\ \underline{\varepsilon}^{n} \end{bmatrix}$$

Calculons $[\,\sigma\,]$. Pour cela, nous retournons à la formule (1.1)

$$\begin{array}{lcl} \overline{e}'_1 = \overline{e}_1 & & \overline{e}_1 = \overline{e}'_1 \\ \overline{e}'_2 = \overline{e}_2 & & \overline{e}_2 = \overline{e}'_2 \\ \vdots \quad \vdots & & \vdots \\ \overline{e}'_i = \lambda\overline{e}_i + \overline{e}_j & \Leftrightarrow & \overline{e}_i = \dfrac{\overline{e}'_i - \overline{e}'_j}{\lambda} \\ \overline{e}'_j = \overline{e}_j & & \overline{e}_j = \overline{e}'_j \\ \vdots \quad \vdots & & \vdots \quad \vdots \\ \overline{e}'_n = \overline{e}_n & & \overline{e}_n = \overline{e}'_n \end{array}$$

ce qui donne :

$$[S] = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & & i & j & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ i \\ j \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

L'inverse [6] de |S| est immédiat à trouver en considérant la deuxième partie de la flèche.

$$\begin{bmatrix} \underline{\varepsilon}'^{1} \\ \underline{\varepsilon}'^{2} \\ \vdots \\ \underline{\varepsilon}'^{i} \\ \underline{\varepsilon}'^{j} \\ \vdots \\ \underline{\varepsilon}'^{n} \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \\ \\ i \\ j \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & & i & j & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ \cdots & \cdots & \frac{1}{\lambda} & -\frac{1}{\lambda} & & \\ \cdots & \cdots & 0 & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} \underline{\varepsilon}^{1} \\ \underline{\varepsilon}^{2} \\ \vdots \\ \underline{\varepsilon}^{i} \\ \underline{\varepsilon}^{j} \\ \vdots \\ \underline{\varepsilon}^{n} \end{bmatrix}$$

(nous avons représenté les éléments non nuls).

2.2. — Changement des composantes d'une forme linéaire induit par le changement de base (1. 1) de E.

Soit $\underline{\varphi}$ une forme linéaire. Sur la base $\underline{\varepsilon}^{i}$, ses composantes φ_i sont définies par :

$$\underline{\varphi} = \varphi_i \, \underline{\varepsilon}^{i}$$

et $$\varphi_i = \underline{\varphi} \, (\bar{e}_i)$$

Dans la base duale $\underline{\varepsilon}'^{i}$, ses composantes sont $\varphi_{'i}$:

$$\underline{\varphi} = \varphi_{'i} \, \underline{\varepsilon}'^{i}$$

avec $$\varphi_{'i} = \underline{\varphi} \, (\bar{e}_{'i})$$

Dans le changement de base (1.1) , nous avons :

$$\begin{aligned} \varphi_{'i} &= \underline{\varphi} (\bar{e}_{'i}) \\ &= \underline{\varphi} \, (S_{'i}^{j} \, \bar{e}_j) \\ &= S_{'i}^{j} \, \underline{\varphi} (\bar{e}_j) \qquad \text{(par linéarité)} \\ &= S_{'i}^{j} \, \varphi_j \end{aligned}$$

$$\boxed{\varphi_{'i} = S_{'i}^{j} \; \varphi_j} \tag{2.7}$$

Avec les conventions, nous pouvons écrire matriciellement :

$$[\varphi_{'1} \, \varphi_{'2} \, \ldots\ldots \varphi_{'n}] = [\varphi_1 \, \varphi_2 \, \ldots\ldots \varphi_n] \, [S]$$

soit :

$$\boxed{\underline{\varphi}' = \underline{\varphi} [S]} \qquad \text{ou} \qquad \underline{\varphi} = \underline{\varphi}' [S]^{-1} \tag{2.8}$$

en définissant les matrices lignes :

$$\varphi = [\varphi_1 \varphi_2 \cdots\cdots \varphi_n]$$

$$\varphi' = [\varphi'_1 \varphi'_2 \cdots\cdots \varphi'_n]$$

Vérifions maintenant que la valeur $\varphi(\overline{X})$ d'une forme linéaire φ pour un vecteur $\overline{X}$ est bien indépendante de la base.
Dans les bases $(\bar{e}_i)$ et $(\underline{\varepsilon}^i)$, $\varphi(\overline{X})$ est égal à :

$$\begin{aligned}\varphi(\overline{X}) &= \varphi_i\, \underline{\varepsilon}^i\, (x^j \bar{e}_j) \\ &= \varphi_i\, x^j\, \underline{\varepsilon}^i(\bar{e}_j) \\ &= \varphi_i\, x^j\, \delta^i_j = \varphi_i\, x^i\end{aligned}$$

Avec nos conventions, nous pouvons l'écrire :

$$\varphi(\overline{X}) = [\varphi_1 \varphi_2 \cdots\cdots \varphi_n] \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}$$

Dans le changement de base (1.1), nous avons :

$$\overline{X} = [S]\, \overline{X}' \qquad \text{(formule 1.5)}$$

$$\varphi = \varphi' [S]^{-1} \qquad \text{(formule 2.8)}$$

$$\varphi(\overline{X}) = \varphi' [S]^{-1} [S]\, \overline{X}' = \varphi'(\overline{X}') \qquad \text{(C. Q. F. D)}$$

Nous pouvons d'ailleurs déduire à partir de cette dernière relation la relation (2.8)

Remarquons que $\varphi\, \overline{X}$ est un nombre tandis que nous pouvons voir facilement que :

$$\overline{X}\varphi = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^n \end{bmatrix} [\varphi_1 \varphi_2 \cdots\cdots \varphi_n]$$

est une matrice (c'est d'ailleurs un projecteur).

Nous retiendrons de ce que nous venons de faire que la formulation intrinsèque des formes linéaires se traduit «analytiquement» : *i.e* le choix d'une base par un formalisme naturel conduit à écrire sous forme de matrice ligne tout ce qui se transforme de manière covariante c'est-à-dire à l'aide de la matrice $[S]$ de changement de base dans E (ce qui se traduit ici par des indices «inférieurs») et sous forme de matrice-colonne tout ce qui se transforme de manière contravariante, c'est-à-dire à l'aide de la matrice $[\sigma] = [S]^{-1}$ (ce qui se traduit par des indices «supérieurs»). Nous pouvons alors comprendre l'abus de langage souvent utilisé sans justification dans plusieurs ouvrages, abus qui fait confondre la forme linéaire $\underline{\varepsilon}^i$, qui, appliqué à $\bar{x}$, donne x^i, et la valeur de la forme pour $\bar{x}$.

3 – TRANSFORMATION D'UN OPERATEUR LINEAIRE $\mathcal{A}$ QUELCONQUE DE E.

Soient $\mathcal{A}$ un opérateur linéaire de E, $\bar{y}$ la transformée de $\bar{x}$ par $\mathcal{A}$:

$$\bar{y} = \mathcal{A}\,\bar{x}$$

Cette relation intrinsèque devient une relation matricielle dès lors que nous choisissons de l'écrire dans une base.

Dans la base $(\bar{e}_i)$, $\mathcal{A}$ est représenté par la matrice $[A]$, $\bar{y}$ et $\bar{x}$ par les matrices colonnes $\bar{Y}$ et $\bar{X}$:

$$\bar{Y} = [A] \quad \bar{X}$$

Dans la base $(\bar{e}'_i)$, $\mathcal{A}$ est représenté par la matrice $[A']$, $\bar{y}$ et $\bar{x}$ par les matrices colonnes $\bar{Y}'$ et $\bar{X}'$:

$$\bar{Y}' = [A']\,\bar{X}'$$

Les relations entre $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{X}'$ et $\bar{Y}'$ sont :

$$\bar{Y} = [S]\,\bar{Y}' \qquad \text{(formule 1.5)}$$

$$\bar{X} = [S]\,\bar{X}'$$

$$\bar{Y} = [A]\,\bar{X}$$

$$[S]\,\bar{Y}' = A\,[S]\,\bar{X}'$$

$$\bar{Y}' = [S]^{-1}\,[A]\,[S]\,\bar{X}'$$

d'où

$$(3.1) \qquad \boxed{[A'] = [S]^{-1}\;[A]\;[S]}$$

Considérons la forme bilinéaire

$$(3.2) \qquad g(\bar{x}, \bar{y}) = g_{ij}\, x^i\, y^i \quad \text{tel que} \quad g(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathrm{K}.$$

K étant le corps sur lequel est défini E. Nous pouvons l'écrire sous la forme : $g(\bar{x})(\bar{y})$, ce qui montre que $g(\bar{x}) \in E^*$. (A la forme bilinéaire correspond (et réciproquement) l'opérateur linéaire g qui applique E dans son dual E^*). D'après notre formalisme, les composantes des covecteurs de E^* doivent s'écrire sous forme de matrice - ligne : ce qui justifie l'écriture (3.2). En effet dans $g_{ij}x^i$ l'indice libre est en deuxième position inférieure,c'est donc une indice de colonne. Nous pouvons donc écrire :

$$g(\bar{x}) = \overline{X}^t\ [G]$$

où $\overline{X}^t$ est le transposé de la matrice colonne des composantes de $\overline{X}$ dans une base déterminée.

Nous pouvons montrer que la forme bilinéaire (3.2) est indépendante de la base. En effet, nous avons :

$$g_{ij}\, x^i = \varphi_j$$

$$\varphi = [\varphi_1 \varphi_2 \cdots\cdots \varphi_n]$$

$$g(\bar{x}, \bar{y}) = \varphi \overline{Y}$$

Dans un changement de base :

$$\overline{Y} = [S]\,\overline{Y}' \qquad \text{(formule 1.6)}$$

$$\varphi = \varphi'\,[S]^{-1} \qquad \text{(formule 2.8)}$$

D'où $\quad g(\bar{x}, \bar{y}) = \varphi\,\overline{Y} = \varphi'\,[S]^{-1}\,[S]\,\overline{Y}' = \varphi'\,\overline{Y}' \qquad$ C.Q.F.D.

Considérons maintenant en particulier la forme quadratique $F(\overline{X}) = B_{ij}\, x^i x^j$
Nous pouvons lui associer la matrice $[B] = [B_{ij}]$ que nous pouvons prendre symétrique, et tel que :

$$F(X) = [x^1\, x^2 \ldots\ldots x^n]\ [B] \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}$$

$$= \overline{X}^t\ [B]\ \overline{X}$$

Dans le changement de base (1.1), nous avons :

$$\overline{X} = [S]\ \overline{X}'$$

$$\overline{X}^t = \overline{X}'^{\,t}\,[S]^t \qquad \text{(t signifiant le transposé)}$$

$$F(\overline{X}) = F(\overline{X}') = \overline{X}'^{\,t}\,[B']\ \overline{X}'$$

où $\quad [B'] = [S]^t\ [B]\ [S]$

En général, nous pouvons choisir la transformation (1.1) de façon à être orthogonale: $[S]^t = [S]^{-1}$, et dans ce cas: $[B'] = [S]^{-1}[B]\,[S]$ conformément à la relation (3.1)

A la forme quadratique $F(\overline{X}) = B_{ij}\, x^i x^j$, nous pouvons associer de façon unique la forme bilinéaire

$$g(\bar{x},\bar{y}) = B_{ij}\, x^i y^j = \overline{X}^t\,[B]\,\overline{Y} = \overline{Y}^t\,[B]\,\overline{X}$$

Cette remarque nous conduit à considérer les formes multilinéaires, ou plus généralement les tenseurs.

4 — TRANSFORMATION INDUITE PAR LE CHANGEMENT DE BASE (1.1) SUR LES COMPOSANTES D'UN TENSEUR AFFINE DE E.

Nous définissons les tenseurs affines de E de façon intrinsèque. Les tenseurs affines de E sont les tenseurs covariants, contravariants, et mixtes de E.

4.1 — Tenseurs covariants.

Les tenseurs covariants d'ordre p de E sont les formes p — linéaires sur E, *i.e.* φ est un tenseur covariant d'ordre p de E si et seulement si nous avons :

$$\begin{cases} \varphi\,(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots\ldots, \bar{x}_i, \ldots\ldots \bar{x}_p) \in K. \\ \varphi\,(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots\ldots, \lambda\bar{x}_i + \lambda'\bar{x}'_i, \ldots\ldots \bar{x}_p) = \\ \lambda\,\varphi\,(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots\ldots, \bar{x}_i, \bar{x}_p) + \lambda'\,\varphi\,(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots\ldots, \bar{x}'_i, \ldots\ldots \bar{x}_p) \end{cases}$$

pour $\forall\, \bar{x}_k \in E \quad k = (1, \ldots\ldots, p)$

$\forall\, (\lambda, \lambda') \in K \otimes K$

$\forall i = (1, \ldots\ldots, p)$

La première relation est la définition d'une *forme*, la seconde, celle de la *p — linéarité*. Il y a une seconde forme équivalente de la p — linéarité : il suffit de prendre $\lambda = 1$, $\lambda' = 0$ puis $\lambda = \lambda' = 1$.

On définit la somme $\varphi + \varphi'$ de deux tenseurs covariants φ et φ' de même ordre p et du produit $\alpha\,\varphi$ pour $\alpha \in K$ de la façon suivante :

$$(\varphi + \varphi')\,(\bar{x}_1, \ldots\ldots, \bar{x}_p) = \varphi\,(\bar{x}_1, \ldots\ldots, \bar{x}_p) + \varphi'\,(\bar{x}_1, \ldots\ldots, \bar{x}_p)$$

$$(\alpha\,\varphi)\,(\bar{x}_1, \ldots\ldots \bar{x}_p) = \alpha\,\varphi\,(\bar{x}_1, \ldots\ldots, \bar{x}_p)$$

pour $\forall\, \bar{x}_i \in E \quad i = (1, \ldots\ldots, p)$

$\alpha \in K.$

La somme dans le second membre de la définition de la somme $\varphi + \varphi'$ est celle dans le corps K. Le produit $\alpha\,\varphi\,(\bar{x}_1, \ldots\ldots, \bar{x}_p)$ est celui des deux éléments α et $\varphi\,(x_1, \ldots\ldots, \bar{x}_p)$ de K.

Il est facile de montrer que l'ensemble des tenseurs covariants (φ) d'ordre p muni des lois «somme» et «produit par un élément de K» a une structure d'espace vectoriel appelé $E^{*\otimes p}$.

Avant de chercher la base de $E^{*\otimes p}$, il faut d'abord définir le produit tensoriel $\varphi \otimes \psi$ de deux tenseurs covariants φ et ψ d'ordres respectifs p et q de la façon suivante :

$$(\varphi \otimes \psi)(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_p, \bar{x}_{p+1}, \ldots, \bar{x}_{p+q}) =$$
$$\varphi(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_p) \cdot \psi(\bar{x}_{p+1}, \ldots, \bar{x}_{p+q})$$

Le produit dans le second membre est le produit dans K. On démontre que le produit tensoriel est distributif à droite et à gauche par rapport à l'addition tensorielle, qu'il est associatif, et que l'on peut assimiler $E^{*\otimes 0}$ à K.

Nous pouvons alors démontrer qu'une base ($\bar{e}_i$) de E admettant $\underline{\varepsilon}^i$ comme base duale induit dans $E^{*\otimes p}$ une base :

$$\underline{\varepsilon}^{i_1 i_2 \ldots i_p} = \underline{\varepsilon}^{i_1} \otimes \underline{\varepsilon}^{i_2} \otimes \cdots \otimes \underline{\varepsilon}^{i_p}$$

tel que le tenseur covariant φ a pour composantes $\varphi_{i_1 i_2 \ldots i_p}$ par rapport à cette base :

$$\varphi = \varphi_{i_1 i_2 \ldots i_p} \underline{\varepsilon}^{i_1 i_2 \ldots i_p}$$

(4.1.1) où $\varphi_{i_1 i_2 \ldots i_p} = \varphi(\bar{e}_{i_1}, \bar{e}_{i_2}, \ldots, \bar{e}_{i_p})$

Remarquons que cette relation est la généralisation de la relation $\varphi_i = \varphi(\bar{e}_i)$ pour une forme linéaire.
La relation (4.1.1) rend aisée la transformation des composantes d'un tenseur covariant lors d'un changement de base. En effet, en faisant le changement de base défini par (1.1) , nous avons :

$$\varphi'_{i_1 i_2 \ldots i_p} = \varphi(\bar{e}'_{i_1}, \bar{e}'_{i_2}, \ldots \bar{e}'_{i_p})$$

$$= \varphi(S'^{j_1}_{i_1} \bar{e}_{j_1}, S'^{j_2}_{i_2} \bar{e}_{j_2}, \ldots S'^{j_p}_{i_p} \bar{e}_{j_p})$$

$$= S'^{j_1}_{i_1} S'^{j_2}_{i_2} \ldots S'^{j_p}_{i_p} \varphi(\bar{e}_{j_1}, \bar{e}_{j_2}, \ldots \bar{e}_{j_p})$$

(à cause de la p — linéarité)

(4.1.2) $\varphi'_{i_1 i_2 \ldots i_p} = S'^{j_1}_{i_1} S'^{j_2}_{i_2} \ldots S'^{j_p}_{i_p} \varphi_{j_1 j_2 \ldots j_p}$

Inversement, nous obtenons :

$$(4.1.3) \qquad \varphi_{j_1 j_2 \dots\dots j_p} = \sigma^{i_1}_{j_1} \sigma^{i_2}_{j_2} \dots\dots \sigma^{i_p}_{j_p} \varphi'_{i_1 i_2 \dots\dots i_p}$$

La formule (4.1.2) est la généralisation de (2.7)

4.2 — Tenseurs contravariants.

En utilisant la dualité de l'espace E et de son dual E* (E** = E) , nous pouvons définir le tenseur contravariant de E.

Un tenseur contravariant $\overline{\varphi}$ d'ordre p de E est une forme p — linéaire sur E*, *i. e.* :

$$\begin{cases} \overline{\varphi} \ (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_i, \dots\dots, \varphi_p) \in K. \\ \overline{\varphi} \ (\varphi_1, \varphi_2, \dots\dots, \ \lambda\varphi_i + \lambda'\varphi'_i, \dots\dots, \varphi_p) = \\ \qquad \lambda \overline{\varphi} (\varphi_1, \varphi_2, \dots\dots, \varphi_i, \dots\dots, \varphi_p) + \lambda' \overline{\varphi} (\varphi_1, \varphi_2, \dots\dots, \varphi'_i, \dots\dots, \varphi_p) \end{cases}$$

pour $\quad \forall \varphi_i \in E^*, \qquad \lambda$ et $\lambda' \in K$

$$\forall i = (1, \dots\dots, p)$$

L'ensemble des tenseurs contravariants d'ordre p muni de l'addition tensorielle et de la multiplication par un élément de K a une structure d'espace vectoriel appelé $E^{\otimes p}$.

La base $(\overline{e}_{i_1 i_2 \dots\dots i_p})$ induite par une base $(\overline{e}_i)$ de E est :

$$\overline{e}_{i_1 i_2 \dots\dots i_p} = \overline{e}_{i_1} \otimes \overline{e}_{i_2} \otimes \dots\dots \otimes \overline{e}_{i_p}$$

où le produit tensoriel $\otimes$ est défini de la même façon que pour les tenseurs covariants. Il y a n^p vecteurs de base si n est la dimension de E d'où :

$$\dim E^{\otimes p} = n^p = \dim E^{*\otimes p}$$

Les composantes $\varphi^{i_1 i_2 \dots\dots i_p}$ du tenseur contravariant $\overline{\varphi}$ sont définies par :

$$\overline{\varphi} = \varphi^{i_1 i_2 \dots\dots i_p} \overline{e}_{i_1 i_2 \dots\dots i_p}$$

et nous pouvons démontrer facilement que :

$$\varphi^{i_1 i_2 \dots\dots i_p} = \overline{\varphi} \left(\underset{=}{\varepsilon}^{i_1}, \underset{=}{\varepsilon}^{i_2}, \dots\dots \underset{=}{\varepsilon}^{i_p} \right)$$

les $(\underset{=}{\varepsilon}^i)$ étant les vecteurs de la base duale de $(\overline{e}_i)$.

Lors du changement de base défini par (2.4), nous avons :

$$\varphi'^{i_1 i_2 \dots\dots i_p} = \overline{\varphi}\ (\underline{\varepsilon}'^{i_1} , \underline{\varepsilon}'^{i_2} ,\dots\dots \underline{\varepsilon}'^{i_p})$$

$$= \overline{\varphi}\ (\sigma'^{i_1}_{j_1} \underline{\varepsilon}^{j_1} , \sigma'^{i_2}_{j_2} \underline{\varepsilon}^{j_2} ,\dots\dots , \sigma'^{i_p}_{j_p} \underline{\varepsilon}^{j_p})$$

(4.2.3) $$\varphi'^{i_1 i_2 \dots\dots i_p} = \sigma'^{i_1}_{j_1} \sigma'^{i_2}_{j_2} \dots\dots \sigma'^{i_p}_{j_p} \quad \varphi^{j_1 j_2 \dots\dots j_p}$$

De même, nous avons :

$$\varphi^{j_1 j_2 \dots\dots j_p} = S'^{j_1}_{i_1} S'^{j_2}_{i_2} \dots\dots S'^{j_p}_{i_p} \varphi'^{i_1 i_2 \dots\dots i_p}$$

4.3 — Tenseurs mixtes.

Un tenseur mixte Θ, covariant d'ordre p et contravariant d'ordre q est à la fois un tenseur covariant d'ordre p sur E et un tenseur contravariant d'ordre q sur E*.

Pour illustrer cette définition, nous allons prendre un exemple :

Θ est un tenseur mixte, covariant d'ordre deux et contravariant d'ordre trois si et seulement si nous avons :

$$\Theta(\overline{X}, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \overline{Y}) \in K \qquad \begin{array}{l} \forall \varphi_i \in E^* \\ \forall (\overline{X}, \overline{Y}) \in E \otimes E \end{array}$$

Θ est linéaire par rapport à chacun des arguments $\overline{X}, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ et $\overline{Y}$.

L'ensemble $E^* \otimes E \otimes E \otimes E \otimes E^*$ muni de l'addition tensorielle et de la multiplication par un scalaire de K a une structure d'espace vectoriel.

On montre qu'une base $(\overline{e}_i)$ de E ayant $(\underline{\varepsilon}^i)$ pour base duale induit dans $E^* \otimes E \otimes E \otimes E \otimes E^*$ la base

(4.3.1) $$\underline{\varepsilon}^{i_1} \otimes \overline{e}_{i_2} \otimes \overline{e}_{i_3} \otimes \overline{e}_{i_4} \otimes \underline{\varepsilon}^{i_5} = t^{i_1}{}_{i_2 i_3 i_4}{}^{i_5}$$

Les composantes $\Theta_{i_1}{}^{i_2 i_3 i_4}{}_{i_5}$ du tenseur mixte Θ sont définies par :

(4.3.2) $$\Theta = \Theta_{i_1}{}^{i_2 i_3 i_4}{}_{i_5} \, t^{i_1}{}_{i_2 i_3 i_4}{}^{i_5}$$

où

(4.3.3) $$\Theta_{i_1}{}^{i_2 i_3 i_4}{}_{i_5} = \Theta\ (\overline{e}_{i_1}, \underline{\varepsilon}^{i_2}, \underline{\varepsilon}^{i_3}, \underline{\varepsilon}^{i_4}, \overline{e}_{i_5})$$

Lors d'un changement de base de E défini par (1.1) et (2.4) , nous avons en utilisant la définition (4.3.2) et la propriété (4.3.3) :

$$\Theta'_{i_1}{}^{i_2 i_3 i_4}{}_{i_5} = \Theta\,(S_{'i_1}^{\;j_1}\,\bar{e}_{j_1} \,,\, \sigma_{j_2}^{\;'i_2}\,\underline{\varepsilon}^{j_2} \,,\, \sigma_{j_3}^{\;'i_3}\,\underline{\varepsilon}^{j_3} \,,\, \sigma_{j_4}^{\;'i_4}\,\underline{\varepsilon}^{j_4} \,,\, S_{'i_5}^{\;j_5}\,\bar{e}_{j_5})$$

$$= S_{'i_1}^{\;j_1}\,\sigma_{j_2}^{\;'i_2}\,\sigma_{j_3}^{\;'i_3}\,\sigma_{j_4}^{\;'i_4}\,S_{'i_5}^{\;j_5}\quad \Theta_{j_1}{}^{j_2 j_3 j_4}{}_{j_5}$$

4.4 — Exemple pratique.

Après avoir rappelé comment nous pouvons définir de façon intrinsèque les tenseurs, nous allons montrer sur un exemple comment nous pouvons faire le calcul pratique pour un changement de base. Nous allons chercher comment se transforment les composantes d'un tenseur covariant d'ordre deux construit sur un espace E à deux dimensions lors d'un changement de base.

Pour pouvoir comparer notre règle de calcul avec la méthode habituelle, nous allons considérer l'exemple traité dans la référence [3]

$$[\,S\,] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

L'inverse $[\,\sigma\,] = [\,S\,]^{-1}$ se calcule aisément :

$$[\,\sigma\,] = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Son calcul peut être fait pour la matrice 2×2 à l'aide de :

$$[\,\sigma\,] = [\,S\,]^{-1} = \frac{1}{\text{dét}\,S}\,[\,I\,\mathrm{Tr}\,S - S\,] = \frac{1}{\text{dét}\,S}\,\mathrm{Adj}\,S$$

où Tr désigne la trace.

Un vecteur $\bar{X} = x^i\bar{e}_i = x'^i\bar{e}_{'i}$ se transforme de la façon suivante (formule 1.5)

$$\bar{X} = S\,\bar{X}'$$

$$(4.4.1)\qquad \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} = [\,S\,]\begin{bmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{bmatrix}$$

ou en écriture détaillée :

$$(4.4.1')\qquad \begin{cases} x^1 = x'^1 + x'^2 \\ x^2 = x'^1 - 2x'^2 \end{cases}$$

Nous inversons :

(4.4.2) $\overline{X}' = [\,S\,]^{-1}\,\overline{X}$

$$\begin{bmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix}$$

ou encore :

(4.4.2')
$$\begin{cases} x'^1 = \frac{2}{3}x^1 + \frac{1}{3}x^2 \\ x'^2 = \frac{1}{3}x^1 - \frac{1}{3}x^2 \end{cases}$$

Pour deux formes linéaires (covecteurs) $\underline{\mathcal{A}}$ et $\underline{\mathcal{B}}$ de composantes $[\,a_1 \;\; a_2\,]$ et $[\,b_1 \;\; b_2\,]$ par rapport à la base duale $(\underline{\varepsilon}^i)$ de E, i.e.

(4.4.3) $\underline{\mathcal{A}} = a_1\,\underline{\varepsilon}^{i_1} + a_2\,\underline{\varepsilon}^{i_2}$

$$\underline{\mathcal{B}} = b_1\,\underline{\varepsilon}^{i_1} + b_2\,\underline{\varepsilon}^{i_2}$$

représentées respectivement suivant nos conventions par :

$\underline{A}$ = matrice ligne $[\,a_1 \;\; a_2\,]$

$\underline{B}$ = matrice ligne $[\,b_1 \;\; b_2\,]$

nous avons les transformations conformément à la relation (2.8) :

(4.4.4) $\underline{A}' = \underline{A}\,[\,S\,]$ ou $\underline{A} = \underline{A}'\,[\,S\,]^{-1}$

$\underline{B}' = \underline{B}\,[\,S\,]$ ou $\underline{B} = \underline{B}'\,[\,S\,]^{-1}$

$$[\,a'_1 \quad a'_2\,] = [\,a_1 \;\; a_2\,]\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

soit :

(4.4.5)
$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} a'_1 = a_1 + a_2 \\ a'_2 = a_1 - 2a_2 \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} b'_1 = b_1 + b_2 \\ b'_2 = b_1 - 2b_2 \end{array} \right\} \end{array} \right.$$

L'inverse donne :

$$[a_1 \quad a_2] = [a'_1 \quad a'_2] \quad [S]^{-1}$$
$$= [a'_1 \quad a'_2] \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$(4.4.6) \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a_1 = \frac{2}{3} a'_1 + \frac{1}{3} a'_2 \\ a_2 = \frac{1}{3} a'_1 - \frac{1}{3} a'_2 \end{cases} \\ \begin{cases} b_1 = \frac{2}{3} b'_1 + \frac{1}{3} b'_2 \\ b_2 = \frac{1}{3} b'_1 - \frac{1}{3} b'_2 \end{cases} \end{array} \right.$$

Les composantes du tenseur covariant $\underline{\mathcal{A}} \otimes \underline{\mathcal{B}}$ d'ordre deux vont se transformer comme suit. La base de $E^{*\otimes 2}$ est :

$$\underline{\varepsilon}^{ij} = \underline{\varepsilon}^i \otimes \underline{\varepsilon}^j$$

$$\underline{\mathcal{A}} \otimes \underline{\mathcal{B}} = a_i \, \underline{\varepsilon}^i \otimes b_j \, \underline{\varepsilon}^j = a_i \, b_j \, \underline{\varepsilon}^i \otimes \underline{\varepsilon}^j$$
$$= a'_i \, \underline{\varepsilon}'^i \otimes b'_j \, \underline{\varepsilon}'^j = a'_i \, b'_j \, \underline{\varepsilon}'^i \otimes \underline{\varepsilon}'^j$$

La formule (4.1.2) s'écrit :

$$(4.4.7) \quad \begin{cases} a'_1 \, b'_1 = (a_1 + a_2)(b_1 + b_2) = a_1 \, b_1 + a_1 \, b_2 + a_2 \, b_1 + a_2 \, b_2 \\ a'_1 \, b'_2 = (a_1 + a_2)(b_1 - 2b_2) = a_1 \, b_1 - 2a_1 \, b_2 + a_2 \, b_1 - 2a_2 \, b_2 \\ a'_2 \, b'_1 = (a_1 - 2a_2)(b_1 + b_2) = a_1 \, b_1 + a_1 \, b_2 - 2a_2 \, b_1 - 2a_2 \, b_2 \\ a'_2 \, b'_2 = (a_1 - 2a_2)(b_1 - 2b_2) = a_1 \, b_1 - 2a_1 \, b_2 - 2a_2 \, b_1 + 4a_2 \, b_2 \end{cases}$$

Elle donne la transformation des composantes

$(a_1 \, b_1 \, , \, a_1 \, b_2 \, , \, a_2 \, b_1 \, , \, a_2 \, b_2)$ de $\underline{\mathcal{A}} \otimes \underline{\mathcal{B}}$.

Nous pouvons encore écrire de façon compacte :

$$\underline{A} = [a_1 \quad a_2] \qquad \underline{B} = [b_1 \quad b_2]$$

$$\underline{A} \otimes \underline{B} = [\, a_1 \quad a_2 \,] \quad \otimes \quad [\, b_1 \quad b_2 \,]$$

$$= [\, a_1\, b_1 \quad a_1\, b_2 \quad a_2\, b_1 \quad a_2\, b_2 \,]$$

Les règles de multiplication sont données par les flèches. Ceci généralise ce que nous avons dit sur l'écriture sous forme de matrice ligne des éléments à indices inférieurs et introduit une *nouvelle* règle de multiplication des matrices représentatives pour le produit tensoriel. [2] . Les lignes de la matrice [S] sont des composantes de tenseur covariant, ce qui permet d'étendre le produit tensoriel au produit de matrice [S]

Quand nous faisons le changement de base défini par (4.4.1) , nous avons pour :

$$\underline{A}' \otimes \underline{B}' = [\, a'_1\, b'_1 \quad a'_2\, b'_1 \quad a'_2\, b'_1 \quad a'_2\, b'_2 \,]$$

la loi :

$$\underline{A}' \otimes \underline{B}' = \underline{A}\,[\,S\,] \otimes B\,[\,S\,]$$

à partir de la relation (2.8)

$$\underline{A}' \otimes \underline{B}' = [\,\underline{A} \otimes \underline{B}\,] \quad [\,S \otimes S\,] \tag{4.4.8}$$

où $[\,S \otimes S\,]$ est la matrice 4 x 4 obtenue suivant les indications ci-dessous

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} 1\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} & 1\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \\ \hline 1\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} & -2\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \tag{4.4.9}$$

Nous donnerons dans un prochain travail la généralisation de ce calcul.

$[\,S \otimes S\,] = S^{\otimes 2}$ est d'ailleurs la puissance deuxième de Kronecker de S.
La relation (4.4.8) s'écrit finalement :

$$[\, a'_1\, b'_1 \quad a'_1\, b'_2 \quad a'_2\, b'_1 \quad a'_2\, b'_2 \,] =$$

$$[\, a_1\, b_1 \quad a_1\, b_2 \quad a_2\, b_1 \quad a_2\, b_2 \,] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Nous pouvons vérifier que nous avons bien la relation (4.4.7).

Pour un tenseur covariant T quelconque d'ordre deux la loi de transformation des composantes t_{ij} est déjà toute trouvée. En effet, elle est donnée par [S ⊗ S].

Il suffit donc de remplacer tout simplement les $a_i\ b_j$ par t_{ij} c'est-à-dire

$$[\,t'_{11}\ t'_{12}\ t'_{21}\ t'_{22}\,] =$$

$$[\,t_{11}\ t_{12}\ t_{21}\ t_{22}\,] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Ainsi prenons deux exemples.Le tenseur T deux fois covariant de composantes

$$[\,t_{11} = 1 \quad t_{12} = 0 \quad t_{21} = 0 \quad t_{22} = 2\,]$$

a ses composantes qui deviennent égales à :

$$[\,t'_{11} \quad t'_{12} \quad t'_{21} \quad t'_{22}\,] =$$

$$[\,1 \quad 0 \quad 0 \quad 2\,] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= [\,3 \quad -3 \quad -3 \quad 9\,]$$

ou encore $t'_{11} = 3$, $t'_{12} = -3$, $t'_{21} = -3$, $t'_{22} = 9$.

Le tenseur deux fois covariant de composantes $s_{11} = 1$ $s_{12} = 2$ $s_{21} = 1$ $s_{22} = 0$ a ses composantes qui deviennent :

$$[\,s'_{11} \quad s'_{12} \quad s'_{21} \quad s'_{22}\,] =$$

$$[\,1 \quad 2 \quad 1 \quad 0\,] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= [\,4 - 2 \quad 1 - 5\,]$$

soit $s'_{11} = +4\ ;\ s'_{12} = -2\ ;\ s'_{21} = 1\ ;\ s'_{22} = -5\ .$

Nous pouvons procéder de la même façon pour les tenseurs contravariants d'ordre deux.

Nous voyons de même que le procédé de calcul du produit $[\ S \otimes S\ ]$ simplifie le problème du changement de base. Des applications à la physique de ce calcul peuvent être trouvées dans la référence [2] où la méthode de calcul a été trouvée mais non explicitée.

L'obtention de la relation (4.4.9) est directe par le procédé de calcul ci-dessus indiqué sans avoir à suivre la méthode classique donnée par exemple dans la référence [3], méthode qui consiste à suivre la marche suivante : (4.4.1') — (4.4.2') — (4.4.5) — (4.4.6) — (4.4.7).
Ces étapes sont tout de suite «court-circuitées» par notre procédé de calcul. Nous les avons toutefois données car elles expliquent très naturellement les règles de multiplication que nous avons introduites.
C'est à dessein que nous avons pris un exemple très simple pour la commodité de l'exposé. Mais il est facile de se convaincre de la simplicité considérable apportée en faisant effectivement les calculs dès que l'ordre des tenseurs devient élevé. En effet, les composantes des tenseurs peuvent être écrites, suivant toujours nos conventions, soit sous forme de matrice-ligne ou de matrice-colonne. Les changements de base sont représentés par une matrice habituelle avec les règles classiques de multiplication ligne-colonne.

Remarquons d'ailleurs qu'une matrice, avec la définition élémentaires de ce mot, est un tenseur mixte d'ordre deux une fois covariant une fois contravariant.

APPENDICE

Nous allons montrer qu'un opérateur linéaire quelconque A de E peut être considéré comme un tenseur mixte, une fois covariant, une fois contravariant sur E. En effet, soient le vecteur $\bar{x} \in E$ et le covecteur $\varphi \in E^*$ et A un opérateur linéaire quelconque de E.

Posons :

$$A_T(\varphi, \bar{x}) = \varphi(A\bar{x}) \in K.$$

L'opérateur A_T défini par le premier membre est linéaire en φ et en $\bar{x}$. C'est donc un tenseur mixte une fois covariant, une fois contravariant :

$$A_T \in E \otimes E^*$$

Si $(\bar{e}_i)$ et $(\underline{\varepsilon}^j)$ sont respectivement une base de E et sa base duale, la base de $E \otimes E^*$ est $\bar{e}_i \otimes \underline{\varepsilon}^j$. Les composantes du tenseur A_T dans la base $\bar{e}_i \otimes \underline{\varepsilon}^j$ sont définies par :

$$A_T = A^i{}_j \; e_i \otimes \underline{\varepsilon}^j$$

et nous savons que les nombres $A^i{}_j$ sont les éléments de la matrice représentant l'opérateur linéaire A dans la base $(\bar{e}_i)$ de E :

$$\begin{aligned} A^i{}_j &= A_T(\underline{\varepsilon}^i, \bar{e}_j) \\ &= \underline{\varepsilon}^i \; (A\bar{e}_j) \end{aligned}$$

Une matrice [A] d'éléments $A^i{}_j$, quand nous donnons une base $(\bar{e}_i)$ de E, peut donc être considéré de deux manières :

— elle représente un opérateur linéaire A de E

— elle représente un tenseur mixte une fois covariant, une fois contravariant $\in E \otimes E^*$

Réciproquement, un tenseur mixte de $E \otimes E^*$ dans la base $\bar{e}_i \otimes \underline{\varepsilon}^j$ peut être représenté par une matrice.

REFERENCE

[1] D. KASTLER. Introduction à l'Electrody namique Quantique — Dunod, Paris, 1961.

[2] RAOELINA ANDRIAMBOLOLONA. Thèse de doctorat d'Etat Faculté des Sciences de Marseille — Université d'Aix-Marseille, 1967

[3] J. BASS. Cours de Mathématiques, Tome I , Masson et Compagnie, 1961 (page 68).