Sciences de la Nature et Mathématiques, N° 11, 1974.

FORMULE DE WALLIS ET FORMULE DE STIRLING

par RAOELINA ANDRIAMBOLOLONA

Laboratoire de Physique - B.P. 138
Faculté des Sciences - Tananarive
Université de Madagascar (Madagascar)

Résumé :

La présente étude porte sur deux formules utiles en Mécanique Statistique et en Calcul de Probabilité. Ce sont la formule de Wallis et la formule de Stirling. La première donne une possibilité de calculer le nombre π*. La seconde donne les approximations de n ! et de Log n !.
Nous donnons la relation entre les intégrales de Wallis et les fonctions eulériennes β (p,q), et plusieurs démonstrations de la formule de Stirling.

Abstract :

The obtention of formula of Wallis and the formula of Stirling which are very useful in Statistical Mechanics and in Probability Theory Calculation is studied. The relations between the Wallis's integrals and β (p,q) Eulerian functions, and three methods of the demonstration of Stirling's formula are given.

* *Note au bas de la page* : Le calcul de π est un très vieux problème mathématique. A notre avis, la première expérience mathématique faite pour sa mesure a eu lieu lors de la construction du temple de Salomon. En effet, nous lisons, dans le 1° Livre des Rois 7[23]. «Il (Salomon) fit la Mer en métal fondu de 10 coudées de bord à bord, à pourtour *circulaire*, de 5 coudées de hauteur ; un fil de 30 coudées en mesurait le pourtour». ($\pi \approx 30 / 10 \approx 3$). Nous retrouvons la même citation dans 2 Chroniques 4 [2]

INTRODUCTION

La présente étude porte sur deux formules utiles en Mécanique Statistique et en Calcul de Probabilité. Ce sont la formule de Wallis et la formule de Stirling. La première donne une possibilité de calculer le nombre π . La seconde donne les approximations de n ! et de Log n !.

Nous donnons la relation entre les intégrales de Wallis et les fonctions eulériennes $\beta(p, q)$, et plusieurs démonstrations de la formule de Stirling.

Il nous a paru utile de grouper ces résultats bien qu'ils soient bien connus: en effet, dans les ouvrages classiques, on les donne sans aucune démonstration ou sans préciser parfois les approximations utilisées.

A — FORMULE DE WALLIS.

Considérons les intégrales réelles : (m entier positif).

$$(A.1) \qquad I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx \qquad J_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \, dx$$

En changeant $x \to \frac{\pi}{2} - x$, nous montrons facilement que $I_m = J_m$

<u>Calcul de I_m.</u>

$$(A.2) \qquad \text{Relation de récurrence : } \boxed{I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2}}$$

Démonstration :

$$I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1} x \, (\sin x \, dx) = \Big[-\sin^{m-1} x \cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} (m-1) \sin^{m-2} x \cos x \cos x \, dx$$

$$= (m-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x \cos^2 x \, dx = (m-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} (1 - \sin^2 x) dx$$

$$= (m-1) I_{m-2} - (m-1) I_m$$

$$I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2}$$

Nous obtenons une relation de récurrence du second ordre. La relation (A. 2) se résoud immédiatement et donne :

$$I_{2n} = \frac{(2n-1)\,(2n-3)\ldots 1}{2n \times (2n-1)\ldots 2}\, I_0 \qquad \text{or} \qquad I_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$I_{2n+1} = \frac{2n \times (2n-2)\ldots 2}{(2n+1)\,(2n-1)\ldots 1}\, I_1 \qquad \text{or} \qquad I_1 = 1$$

d'où :

(A. 3)

$$\begin{cases} I_{2n} = \dfrac{\pi}{2}\,\dfrac{1\times 3\times 5\times \ldots (2n-1)}{2\times 4\times 6\times \ldots \times 2n} = \dfrac{\pi}{2}\,\dfrac{(2n)\,!}{2^{2n}(n!)^2} = \dfrac{\pi}{2}\,\dfrac{(2n)\,!}{\left[2^n\, n!\right]^2} \\[2ex] I_{2n+1} = \dfrac{2\times 4\times 6 \ldots \times 2n}{1\times 3\times 5\times \ldots \times (2n+1)} = \dfrac{(2^n\, n!)^2}{(2n+1)\,!} \end{cases}$$

De (A. 3) et (A . 2) nous tirons les relations :

(A . 4)

$$\boxed{I_{2n} \times I_{2n+1} = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{(2n+1)}}$$

(A. 5)

$$\boxed{\frac{I_{2n+2}}{I_{2n}} = \frac{2n+1}{2n+2}}$$

(A. 6)

$$\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = \frac{\pi}{2}\,\frac{(2n)\,!\,(2n+1)\,!}{\left[2^n\; n!\right]^4} = \frac{\pi}{2}\left[\frac{2n\,!}{(2^n\, n!)^2}\right]^2 (2n+1)$$

<u>Etude des limites.</u>

Dans l'intervalle fermé $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leqslant \sin x \leqslant 1$ d'où $\sin^{2n} x \geqslant \sin^{2n+1} x \geqslant \sin^{2n+2} x$;

d'où $I_{2n} \geqslant I_{2n+1} \geqslant I_{2n+2}$

En divisant par I_{2n} , nous avons :

$$1 \geqslant \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \geqslant \frac{I_{2n+2}}{I_{2n}}$$

Or d'après (A. 5) ou (A. 2) $\dfrac{I_{2n+2}}{I_{2n}} = \dfrac{2n+1}{2n+2} \xrightarrow[n=\infty]{} 1$

d'où $\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1$

or $\qquad \dfrac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = \dfrac{\pi}{2}\,(2n+1)\left[\dfrac{2n\,!}{2^{2n}\,(n\,!)^2}\right]^2 \qquad$ (formule (A. 6)).

La formule de Wallis donne une méthode de calcul approché du nombre π :

(A. 7) $\qquad \boxed{\dfrac{\pi}{2} = \lim\limits_{n=\infty} \dfrac{2^{4n}(n\,!)^4}{(2n\,!)^2}\,\dfrac{1}{2n+1}}$

(A. 8) $\qquad \boxed{\pi = \lim\limits_{n=\infty} \left[\dfrac{2^{2n}(n\,!)^2}{2n\,!}\right]^2 \dfrac{1}{n}}$

La relation (A. 7) peut s'écrire sous la forme développée :

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2n+1}\left[\frac{2\times 4\times 6\times \ldots\times 2n}{1\times 3\times 5\times \ldots (2n-1)}\right]^2 (1+\in)$$

(A. 9) $\qquad \boxed{\lim\limits_{m=\infty} I_m = 0 \quad \text{et} \quad I_m \underset{m=\infty}{\approx} \sqrt{\frac{\pi}{2m}}}$

Démonstration : $\qquad \lim\limits_{n=\infty} \dfrac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1 \quad$ d'où $\quad I_{2n+1} \underset{n=\infty}{\approx} I_{2n}$

Nous utilisons la relation (A. 4) :

$$\left[I_m\right]^2 \underset{n=\infty}{\approx} \frac{\pi}{2m} \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

<u>Relation entre les intégrales de Wallis et les fonctions eulériennes β (p,q).</u>

(A. 10) $\qquad$ a) – Rappels : $\quad \Gamma(p) = \displaystyle\int_0^{\infty} t^{p-1}e^{-t}\,dt \quad$ définie pour $\forall p > 0$

(A. 10') $\qquad$ Relation importante : $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$

si n entier $\qquad \Gamma(n+1) = n\,!$

(A. 11) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ (Le calcul utilise la formule des compléments : $\Gamma(p)\,\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}$)

(A. 12) $$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{1 \times 3 \times \ldots \times (2n-1)}{2n}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{(2n)!}{2^{2n}\,n!}\sqrt{\pi}$$

On peut prolonger $\Gamma(x)$ pour $x < 0$ par $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$ pour $-1 < x < 0$, puis par recurrence ensuite à l'aide de la relation (A. 10')

(A. 13) $$\beta(p.q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt \quad \exists \text{ pour } \forall\, p > 0 \text{ et } \forall q > 0.$$

(A. 14) $$= \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

b — Intégrales de Wallis et fonctions euleriennes.

Le calcul de :

$$I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,dx$$

peut être ramené aux fonctions $\beta(p, q)$:

(A. 15) $$\boxed{I_m = \frac{1}{2}\,\beta\left(\frac{m+1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)}}$$

Démonstration : Nous faisons le changement de variable $\sin x = \sqrt{t}$

$$I_m = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{m-1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}\,dt = \frac{1}{2}\,\beta\left(\frac{m+1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)}$$

La formule (A. 15) est vraie même pour m non entier.

Dans le cas où m est entier, il faut distinguer m pair ou m impair.

(A. 16) $\underline{m = 2n}$ $$I_{2n} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{1 \times 3 \times \dots (2n-1)\sqrt{\pi}}{2^{2n}\, n\,!}$$

$$= \frac{\pi}{2}\,\frac{(2n)\,!}{2^{2n}\,(n\,!)^2}$$

$\underline{m = 2n+1}$: $$I_{2n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2}+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+\frac{1}{2}+1)} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1+\frac{1}{2})}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{n\,!}{(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})\cdots\frac{3}{2}\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{2^{2n}(n!)(n!)}{(2n+1)!}$$

$$= \frac{(2^n\, n!)^2}{(2n+1)!}$$

Nous retrouvons les formules (A. 3).

Remarque :

De la formule (A. 12) : $\Gamma\,(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$, nous avons pour n très grand $n+\frac{1}{2} \approx n+1$ et $\Gamma\,(n+\frac{1}{2}) \approx \Gamma\,(n+1) \approx n!$ et nous obtenons la formule de Wallis (A. 8)

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n=\infty} \frac{2^{2n}\,(n\,!)^2}{2n\,!\,\sqrt{n}}$$

B — FORMULE DE STIRLING.

$$\text{Log}\, n\,! = n\,\text{Log}\,\frac{n}{e} + \frac{1}{2}\text{Log}\,(2\pi n) + \frac{1}{12n} - \frac{1}{360}\frac{1}{n^3} + \frac{1}{1260n^5} + \cdots$$
$$+ \frac{(-1)^{\nu-1}\, B_\nu}{(2\nu-1)(2\nu)n^{(2\nu-1)}} + \frac{(-1)^{\nu}\, B_{\nu+1}\,\theta}{(2\nu+1)(2\nu+2)\,n^{2\nu+1}} \;;\; 1<\theta<2$$

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\left[1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{2\times 12^{2}}\,\frac{1}{n^2} + \cdots\right]$$

où les B_ν sont les nombres de Bernouilli

$$B_1 = \frac{1}{6} \; ; \qquad B_2 = \frac{1}{30} \; , \qquad B_3 = \frac{1}{42} \; ; \qquad B_4 = \frac{1}{30}$$

$$B_5 = 5/66 \, , \; B_6 = 691/2730 \, , \; \ldots$$

Première démonstration

Nous cherchons une formule approchée de $\operatorname{Log} n\,! = \sum_{p=1}^{n} \operatorname{Log} p$.

Pour cela, nous allons comparer la somme $\sum_{p=1}^{n} \operatorname{Log} p$ à l'intégrale $\int_1^n \operatorname{Log} x \, dx$

(B. 1) $$\int_1^n \operatorname{Log} x \, dx = n \, (\operatorname{Log} n - 1) = n \operatorname{Log} \frac{n}{e}$$

(B. 2) Nous formons la suite : $s_n = \operatorname{Log} n\,! - n \operatorname{Log} \frac{n}{e}$.

Si $n > 1$, nous avons :

$$u_n = s_n - s_{n-1}$$

(B. 3) $$u_n = \left\{ \operatorname{Log} n! - n(\operatorname{Log} n - 1) \right\} - \left\{ \operatorname{Log}(n-1)! - (n-1) \left[\operatorname{Log}(n-1) - 1 \right] \right\}$$

$$= \operatorname{Log} \frac{n\,!}{(n-1)\,!} - n(\operatorname{Log} n - 1) + (n-1)(\operatorname{Log}(n-1) - 1)$$

$$= \operatorname{Log} n - n\operatorname{Log} n + \cancel{n} + (n-1) \operatorname{Log}(n-1) - (\cancel{n} - 1)$$

$$= 1 - (n-1) \operatorname{Log} n + (n-1) \operatorname{Log}(n-1)$$

$$= 1 + (n-1) \operatorname{Log} \frac{n-1}{n} = 1 + (n-1) \operatorname{Log} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$= 1 + (n-1) \left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} - \cdots\right)$$

$$= 1 - (n-1) \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} + 0(1) \frac{1}{n^3}$$

(B. 4) Nous voyons alors que $s_n = \sum_{j=1}^{n} u_j \approx \frac{\text{Log} n}{2}$.

En effet, nous pouvons comparer $s_n = \sum_{j=1}^{n} u_j$ à l'intégrale

$$\int_1^n \left[\frac{1}{2x} + \frac{1}{6x^2} + 0(1)\frac{1}{x^3}\right] dx \approx \frac{1}{2} \text{ Log } n \quad \text{qui est divergente .}$$

Nous allons prendre non pas $s_n = \text{Log } n! - n\text{Log } \frac{n}{e}$ mais

(B. 5) $S_n = s_n - \frac{1}{2} \text{ Logn} = \text{Log } n! - n\text{Log } \frac{n}{e} - \frac{1}{2} \text{ Logn}$

En effet, nous savons que $\Sigma \frac{1}{n}$ est divergente, mais $\sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{\ell} - \text{Logn}$ est convergente, et tend vers la constante C d'Euler, ce qui justifie l'introduction de S_n ci-dessus.

(B. 6) Introduisons donc $S_n = \text{Logn}! - n\text{Log } \frac{n}{e} - \frac{1}{2} \text{ Logn}$.

(B. 7) $v_n = S_n - S_{n-1} = s_n - s_{n-1} - \frac{1}{2} \text{ Log } \frac{n}{n-1}$

$$= u_n - \frac{1}{2} \text{ Log } \frac{n}{n-1}$$

$$= \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} + \frac{1}{2} \text{ Log } \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{0(1)}{n^3}$$

$$= \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} - \cdots\right)$$

$$= -\frac{1}{12n^2} + \frac{0(1)}{n^3}$$

Nous avons utilisé le développement :

$$\text{Log}(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots$$

La série v_n converge. $S_n = \sum_{j=1}^{n} v_j$ admet donc une limite S pour n infini.

(B. 8) Soit $R_n = S - S_n$ le reste d'ordre n. Nous avons :

$$R_n = \sum_{j=n+1}^{\infty} v_j = v_{n+1} + v_{n+2} + \cdots = -\frac{1}{12} \sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{1}{p^2} + \frac{0(1)}{n^3}$$

Nous allons chercher l'ordre de grandeur de R_n. Nous avons la double inégalité :

$$\frac{1}{p(p+1)} < \frac{1}{p^2} < \frac{1}{p(p-1)}$$

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} < \frac{1}{p^2} < \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}$$

Nous sommons sur p à partir de $p = n + 1$, jusqu'à p infini :

(B. 9)
$$\frac{1}{n+1} < \sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{1}{p^2} < \frac{1}{n}$$

d'où
$$-\frac{1}{12}\frac{1}{n} < \left(-\frac{1}{12}\right) \sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{1}{p^2} < -\frac{1}{12(n+1)}$$

$$R_n > -\frac{1}{12n}$$

d'où
$$S_n = S - R_n < S + \frac{1}{12n} + \frac{0(1)}{n^2}$$

Et finalement en remplaçant S_n, nous avons :

(B. 10)
$$\text{Log } n! = n \text{ Log } \frac{n}{e} + \frac{1}{2} \text{Log} n + S + \frac{1}{12n} + \frac{0(1)}{n^2}$$

c'est-à-dire :

(B. 11)
$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}\; e^S \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{0(1)}{n^2}\right)$$

Pour trouver $e^S = A$, nous allons utiliser la formule de Wallis en y portant l'expression de n ! :

$$\pi = \lim_{n=\infty} \left(\frac{2^{2n}\,(n!)^2}{2n!}\right)^2 \frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n=\infty} \left[2^{2n} \left(\frac{n}{e}\right)^{2n} \frac{n\, e^{2S}}{e^{S} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{2n}} \right]^{2} \frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n=\infty} e^{2S} \frac{\left(\sqrt{n}\right)^{2}}{2} \frac{1}{n} = \frac{e^{2S}}{2} = \frac{A^{2}}{2}$$

d'où $$e^{S} = A = \sqrt{2\pi}$$

Les formules (B. 10) et (B. 11) donnent finalement :

(B. 12) $$\operatorname{Log} n! = n \operatorname{Log} \frac{n}{e} + \frac{1}{2} \operatorname{Log} (2\pi n) + \frac{1}{12 n} + \frac{0(1)}{n^{2}}$$

(B. 13) $$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^{n} \sqrt{2\pi n} \left[1 + \frac{1}{12 n} + \frac{0(1)}{n^{2}} \right]$$

Ces deux formules sont d'ailleurs un cas particulier d'une formule plus générale (voir la troisième démonstration).

Deuxième démonstration

Posons à priori que : $n! = \left(\frac{n}{e}\right)^{n} \sqrt{n}\, f(n) = n^{n+1/2} e^{-n} f(n)$

Nous allons montrer que $\lim_{n\to\infty} f(n)$ est finie. Calculons :

$$\frac{f(n+1)}{f(n)} = \frac{(n+1)!}{n!} \frac{(n+1)^{-(n+1+1/2)}}{n^{-(n+1/2)}} \frac{e^{n+1}}{e^{n}}$$

(B. 14) $$\frac{f(n+1)}{f(n)} = e \left[1 + \frac{1}{n} \right]^{-(n+\frac{1}{2})}$$

$$\operatorname{Log} f(n+1) - \operatorname{Log} f(n) = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \operatorname{Log} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Nous développons $\operatorname{Log}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k} \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^{k+1}}{(k+1)}$

$$\operatorname{Log} f(n+1) - \operatorname{Log} f(n) = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k} \frac{1}{(k+1) n^{k+1}}$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k}}{(k+1)} \frac{1}{n^{k}} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{(-1)^{k}}{(k+1) n^{k+1}}$$

$$= 1 - \frac{(-1)^{o}}{1}\frac{1}{1^{o}} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{(k+1)}\frac{1}{n^{k}} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2}\frac{(-1)^{k}}{n^{k+1}}$$

Nous avons mis en évidence la contribution pour $k = o$ du second terme.

Posons dans le deuxième terme $k - 1 = \rho \Leftrightarrow k = \rho + 1$.

$\sum_{k=1}^{\infty} - \frac{(-1)^{k}}{(k+1)}\frac{1}{n^{k}} = \sum_{\rho=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\rho}}{(\rho+2)}\frac{1}{n^{\rho+1}}$ et en changeant $\rho \to k$ (variable de sommation).

$$= \sum_{k=o}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{(k+2)}\frac{1}{n^{k+1}}$$

Finalement :

$$\text{(B. 15)} \qquad \text{Log } f(n+1) - \text{Log}(fn) = \sum_{k=o}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{k}}{(k+2)}\frac{1}{n^{k+1}} - \frac{(-1)^{k}}{2(k+1)}\frac{1}{n^{k+1}}\right]$$

$$= \sum_{k=o}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{n^{k+1}}\left[\frac{1}{(k+2)} - \frac{1}{2(k+1)}\right]$$

$$= \sum_{k=o}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{n^{k+1}}\frac{k}{2(k+1)(k+2)}$$

Remarquons que pour $k = 0$, le terme en $\frac{1}{n}$ a un coëfficient nul d'où finalement :

$$\text{(B. 16)} \qquad \text{Log } f(n+1) - \text{Log } f(n) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{n^{k+1}}\frac{k}{2(k+1)(k+2)}$$

$$= -\frac{1}{2\times2\times3}\frac{1}{n^{2}} + \frac{2}{2\times3\times4}\frac{1}{n^{3}} - \frac{1}{n^{4}}\frac{3}{2\times4\times5} + \cdots$$

$$= -\frac{1}{12n^{2}} + \frac{1}{12n^{3}} - \frac{3}{40n^{4}} + \cdots + \frac{(-1)^{k}k}{2(k+1)(k+2)}\frac{1}{n^{k+1}} + \cdots$$

La série de terme général

$$u_{n} = \text{Log } f(n+1) - \text{Log } f(n) \underset{n=\infty}{\approx} -\frac{1}{12n^{2}} \quad \text{est donc}$$

convergente car $u_n \approx -\dfrac{1}{12n^2}$ est convergent d'où

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ est convergente $\Leftrightarrow$ Log f (n) a une limite pour $n = \infty$.

Appelons cette limite S $\Leftrightarrow$ $\quad \lim_{n=\infty} f(n) = e^S = A$

(B.17) $$f(n) = A\left(1 + \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\alpha_2}{n^2} + \cdots + \frac{\alpha_j}{n^j} + \cdots\right)$$

$$\text{Log}\, f(n) = \text{Log}A + \text{Log}\left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_j}{n^j}\right)$$

$$= \text{Log}\, A + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_j}{n^j}\right)^{k+1}}{(k+1)}$$

$$= \text{Log}\, A + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_j}{n^j}\right)^{k+1}$$

$$= \text{Log}\, A + \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\alpha_2}{n^2} + \cdots \frac{\alpha_k}{n^k} + \cdots$$

$$- \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_1}{n} + \frac{\alpha_2}{n^2} + \cdots \frac{\alpha_k}{n^k} + \cdots\right)^2$$

$$+ \frac{1}{3}\left(\frac{\alpha_1}{n} + \frac{\alpha_2}{n^2} + \cdots \frac{\alpha_k}{n^k} + \cdots\right)^3$$

....

$$= \text{Log}\, A + \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\alpha_2}{n^2} - \frac{1}{2}\frac{\alpha_1^2}{n^2} + \frac{\alpha_3}{n^3} - \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_1 \alpha_2 2}{n^3}\right)$$

$$+ \frac{1}{3}\left(\frac{\alpha_1^3}{n^3} + \cdots\right)$$

$$= \text{Log}\, A + \frac{\alpha_1}{n} + \frac{1}{n^2}\left(\alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_1^2\right) + \frac{1}{n^3}\left(\alpha_3 - \frac{1}{2} 2\alpha_1 \alpha_2 + \frac{\alpha_1^3}{3}\right) + \cdots$$

$$\text{Log}\, f(n) = \text{Log}\, A + \frac{\alpha_1}{n} + \frac{1}{n^2}\left(\alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_1^2\right) + \frac{1}{n^3}\left(\alpha_3 - \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1^3\right) + \cdots$$

$$\text{Log } f(n+1) = \text{Log } A + \frac{\alpha_1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}\left(\alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_1^2\right) + \frac{1}{(n+1)^3} \times$$
$$\times\left(\alpha_3 - \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1^3\right) + \cdots$$

(B.18) $$u_n = \text{Log } f(n+1) - \text{Log } f(n) = \alpha_1\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_1^2\right)\left[\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2}\right]$$
$$+ \left(\alpha_3 - \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1^3\right)\left(\frac{1}{(n+1)^3} - \frac{1}{n^3}\right) + \cdots$$
$$= \alpha_1\left[\frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} - \frac{1}{n}\right] + \left(\alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_1^2\right)\left[\frac{1}{n^2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-2} - \frac{1}{n^2}\right]$$
$$+ \left(\alpha_3 - \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1^3\right)\left[\frac{1}{n^3}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-3} - \frac{1}{n^3}\right] + \cdots$$
$$= \alpha_1\left[\frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \cdots\right) - \frac{1}{n}\right] + \left(\alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_1^2\right)\left(\frac{1}{n^2}\right)\left[\left(1 - \frac{2}{n} + \frac{6}{n^2}\right) - 1\right] + \cdots$$

(B.19) $$\text{Log } f(n+1)/f(n) = +\alpha_1\left(-\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{n^3}\left[\alpha_1 - 2\left(\alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_1^2\right)\right] + \cdots$$
$$= -\frac{1}{n^2}\alpha_1 + \frac{1}{n^3}\left(\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_1^2\right) + \cdots$$

Par identification avec le développement (B. 16) de u_n , nous avons :

$$\alpha_1 = \frac{1}{12} \searrow \alpha_1 = \frac{1}{12}$$

$$\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_1^2 = \frac{1}{12} \searrow 2\alpha_2 = \alpha_1(1 + \alpha_1) - \frac{1}{12} = \frac{1}{12}\left(1 + \frac{1}{12}\right) - \frac{1}{12}$$
$$= \frac{1}{12}\left(\frac{1}{12}\right) = \frac{1}{12 \times 12}$$
$$\alpha_2 = \frac{1}{12 \times 12 \times 2} = \frac{1}{2 \times 144} = \frac{1}{288}$$

Nous pouvons calculer ainsi de proche en proche les α_j .

Pour calculer A, nous pouvons utiliser la formule de Wallis.

Remarque : Nous pouvons écrire jusqu'à l'ordre 2

$$n\,! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi\, n}\left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12n}\right)^2 + \cdots\right)$$

il semblerait donc intéressant de faire le développement par rapport à $\frac{1}{12n}$

$$\operatorname{Log} n\,! = \operatorname{Log}\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} + \operatorname{Log}\left(1+\frac{1}{12n} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12n}\right)^2 + \cdots\right)$$

$$= \operatorname{Log}\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} + \left[\frac{1}{12n} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12n}\right)^2 + \cdots\right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12n} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12n}\right)^2 + \cdots\right)^2 + \cdots\right]$$

$$= \operatorname{Log}\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} + \left[\frac{1}{12n} + \cancel{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{12n}\right)^2} - \cancel{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{12n}\right)^2} + \cdots\right]$$

Troisième démonstration

Nous utilisons la formule d'Euler-Mac-Laurin, la fonction $\Gamma(x)$ d'Euler (l'interpolation de $\Gamma(x)$ pour x non entier conduit à la formule de Stirling) et les nombres de Bernouilli.

Pour cela, nous utilisons la formule d'intégration approchée d'Euler – Mac-Laurin :

$$(\text{B. } 20) \quad \int_a^b F(t)\,dt = \frac{b-a}{2}\left[F(b) + F(a)\right] + \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^p}{(2p)!} B_p (b-a)^{2p} \left[F^{(2p-1)}(b) - F^{(2p-1)}(a)\right]$$

$$+ \frac{(-1)^{n+1} B_{n+1}}{(2n+2)!} (b-a)^{2n+3} F^{(2n+2)}(\xi) \qquad a \leqslant \xi \leqslant b\,.$$

valable si la densité d'ordre $2n+2$ $F^{(2n+2)}(\xi)$ de F(x) est continue sur [a, b].

Les B_p sont les nombres Bernouilli :

$$B_1 = \frac{1}{6},\ B_2 = \frac{1}{30},\ B_3 = \frac{1}{42}\ \ldots,\ B_4 = 1/30,\ B_5 = 5/66$$

$$B_6 = 691/2730\ ,\ \ldots$$

Nous interpolons aussi $\Gamma(x+1)$ pour x non entier. La relation fondamentale reste: $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$. On montre que pour $x>0$ $\mathrm{Log}\,\Gamma(x)$ est indéfiniment dérivable et que ses dérivées sont de signe constant. Nous appliquons alors la relation (B. 20) d'Euler Mac-Laurin à :

$$F(x) = \mathrm{Log}\,\Gamma(x),\quad a = x \text{ et } b = x+1$$

(B. 21) $$F(x+1) = \mathrm{Log}x\,\Gamma(x) = \mathrm{Log}x + \mathrm{Log}\,\Gamma(x) = \mathrm{Log}x + F(x)$$

$$F(x+1) - F(x) = \mathrm{Log}x$$

Nous dérivons les deux membres q fois.

(B. 22) $$F^{(q)}(x+1) - F^{(q)}(x) = (-1)^{q+1}\frac{(q-1)!}{x^q}$$

En dérivant l'intégrale $\int_x^{x+1} F(t)\,dt$, nous avons

(B. 23) $$\frac{d}{dx}\int_x^{x+1} F(t)\,dt = F(x+1) - F(x) = \mathrm{Log}x$$

ce qui donne par intégration des deux membres :

(B. 24) $$\int_x^{x+1} F(t)\,dt = x(\mathrm{Log}x - 1) + A$$ où A est une constante d'intégration.

Nous écrivons maintenant la relation (B. 20) pour l'intégrale

$$\int_x^{x+1} F(t)\,dt :$$

(B. 25)

$$x(\mathrm{Log}x - 1) + A = \frac{1}{2}\left[\,2\,\mathrm{Log}\,\Gamma(x) + \mathrm{Log}x\,\right] + \sum_{p=1}^{n}\frac{(-1)^p}{(2p-1)\,2p}B_p\frac{1}{x^{2p-1}}$$

$$\cdots + \theta\cdot\frac{(-1)^{n+1}B_{n+1}}{(2n+1)(2n+2)}\,\frac{1}{x^{2n+1}};\qquad 0<\theta<2$$

En résolvant par rapport à Log $\Gamma(x)$ (nous faisons passer tous les termes du second membre dans le premier membre sauf $\Gamma(x)$,) nous obtenons :

$$\text{(B. 26)} \qquad \operatorname{Log}\Gamma(x) = x(\operatorname{Log}x - 1) + A - \frac{1}{2}\operatorname{Log}x - \sum_{p=1}^{n}\frac{(-1)^p}{(2p-1)2p}B_p\frac{1}{x^{2p-1}}$$

$$-\theta\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)(2n+2)}B_{n+1}\frac{1}{x^{2n+1}};\ 0\leqslant\theta\leqslant 2;\quad \theta\in[1,2]$$

La constante A s'obtient par comparaison avec la formule de Wallis et est égale à : $A = \frac{1}{2}\operatorname{Log} 2\pi$. Nous obtenons ainsi la formule de Stirling généralisée :

$$\text{(B. 27)} \qquad \boxed{\begin{aligned}&\operatorname{Log}\Gamma(x)=x(\operatorname{Log}x-1)-\frac{1}{2}\operatorname{Log}x+\frac{1}{2}\operatorname{Log} 2\pi+\frac{1}{2}B_1\frac{1}{x}-\frac{1}{12}B_2\frac{1}{x^3}\\&+\frac{1}{30}B_3\frac{1}{x^5}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}B_n}{(2n-1)\ 2n}\frac{1}{x^{2n-1}}+\frac{(-1)^nB_{n+1}}{(2n+1)(2n+2)}\theta\frac{1}{x^{2n+1}}\end{aligned}}$$

Rappelons que : $B_1 = \frac{1}{6}$; $B_2 = \frac{1}{30}$; $B_3 = \frac{1}{42}$; $B_4 = 1/30$

$B_5 = 5/66$; $B_6 = 691/2730$; ...

Application : calcul de n ! $\qquad \Gamma(n) = (n-1)!$ pour $x = n$ entier

$$\text{(B. 28)} \qquad \operatorname{Log}(n-1)! = n(\operatorname{Log}n - 1) - \frac{1}{2}\operatorname{Log}n + \frac{1}{2}\operatorname{Log} 2\pi +$$

$$\frac{1}{12}\frac{1}{n}-\frac{1}{360}\frac{1}{n^3}+\frac{1}{1260}\frac{1}{n^5}+\cdots+\frac{(-1)^{\nu-1}B_\nu}{(2\nu-1)2\nu n^{2\nu-1}}+\frac{(-1)^\nu B_{\nu+1}\theta}{(2\nu+1)(2\nu+2)}\frac{1}{n^{2\nu+1}}$$

En ajoutant Logn aux deux membres, nous avons alors :

$$\text{(B. 29)} \qquad \boxed{\begin{aligned}&\operatorname{Log}n! = n(\operatorname{Log}n-1)+\frac{1}{2}\operatorname{Log}n+\frac{1}{2}\operatorname{Log} 2\pi+\frac{1}{12n}-\frac{1}{360}\frac{1}{n^3}\\&+\frac{1}{1260}\frac{1}{n^5}+\cdots+\frac{(-1)^{\nu-1}}{(2\nu-1)2\nu}\frac{B_\nu}{n^{2\nu-1}}+\frac{(-1)^\nu B_{\nu+1}\theta}{(2\nu+1)(2\nu+2)n^{2\nu+1}}\end{aligned}}$$

Remarques :

a) — Dans la formule (B. 29) , à partir des termes en $\frac{1}{n}$, nous voyons apparaître les puissances *impaires* de $\frac{1}{n}$. Cette remarque permet de calculer le développement de n ! au lieu de Log n !.

b) — Si nous regardons la formule (B. 27) , la série de terme général $\frac{1}{x^{2\nu - 1}}$ est divergente. Nous *n'avons donc pas* là un *développement en série* de $\text{Log}\,\Gamma(x)$.
Mais pour n fixé, le reste R_n est de l'ordre de $\frac{1}{x^{2n+1}}$ et tend vers 0 quand $x \to \infty$

c) — Pour chaque valeur de x, nous augmentons l'approximation en augmentant l'ordre n de développement.

d) — La série de Stirling dont les n premiers termes ont pour somme pour x assez grand la valeur de $\text{Log}\,\Gamma(x)$ avec l'approximation égale à $\frac{1}{x^{2n+1}}$ rentre dans la catégorie des séries asymptotiques.

BIBLIOGRAPHIE

E. BOREL-DELTHEIL-R.HURON. — Probabilités - Erreurs (Colin)

VALIRON — Cours d'Analyse mathématique

J. BASS — Cours de Mathématiques. Tome I , (Masson et Cie) (1961)