Sciences de la Nature et Mathématiques, N° 10, 1973

FORMULES DONNANT LES INTEGRALES DE TYPE GAUSSIEN INTERVENANT DANS LA RENORMALISATION EN THEORIE QUANTIQUE DES CHAMPS

par RAOELINA ANDRIAMBOLOLONA
Laboratoire de Physique - B.P. 138
Faculté des Sciences - Tananarive
Université de Madagascar (Madagascar)

Résumé :

Nous donnons les formules qui interviennent souvent dans le calcul de la renormalisation en Théorie Quantique des Champs quand nous utilisons les paramètres de Schwinger. Ce sont des intégrales de type gaussien, prises sur l'espace de Minkowski.

Abstract :

Useful formulea appearing in the renormalization calculations in the Quantum Field Theory when Schwinger's parameters are used are given (gaussian type integrals on the Minkowski space).

Introduction

Quand on calcule les différentes contributions des diagrammes de Feynman, on peut utiliser deux méthodes.

La première consiste à utiliser la formule de Feynman :

$$\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n} a_i} = (n-1)! \int_0^1 d\alpha_1 \ldots \int_0^1 d\alpha_n \frac{\partial\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i - 1\right)}{\left[\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \quad a_i\right]^n}$$

où $\prod\limits_{i=1}^{n} a_i$ désigne le produit des n facteurs a_i.

Parfois, il s'avère que le calcul peut être simplifié en utilisant les relations de Bogoliubov :

$$\text{(1a)} \quad \frac{1}{\bar{k}^2 + m^2 - i\epsilon} = -\frac{1}{i} \int_0^\infty \exp\left[-i\alpha(\bar{k}^2 + m^2 - i\epsilon)\right] d\alpha \qquad \text{pour } \epsilon > 0$$

$$\text{(1b)} \quad \frac{1}{\bar{k}^2 + m^2 + i\epsilon} = \frac{1}{i} \int_0^\infty \exp\left[\, i\alpha(\bar{k}^2 + m^2 + i\epsilon)\,\right] d\alpha \qquad \text{pour } \epsilon > 0$$

et c'est la seconde méthode, qu'on peut appeler encore méthode des exponentielles. $\bar{k}^2$ représente le carré minkowskien du quadrivecteur $\bar{k}$. Le premier membre de formule (1a) représente le propagateur d'un boson de quadrivecteur $\bar{k}$ et de masse m (il est bien connu qu'il peut aussi représenter le propagateur d'un fermion à condition de multiplier par le facteur de Dirac $(\gamma^\mu k_\mu + m)$ au numérateur).

La démonstration de la formule (1a) est immédiate : il suffit d'intégrer le second membre ; seule la contribution pour $\alpha = O$ subsiste car celle pour $\alpha = +\infty$ est nulle à cause de $\epsilon > O$. La formule (1b) s'obtient de (1a) pour la conjugaison complexe. Les premiers membres de (1a) et de (1b) sont, du point de vue mathématique des distributions. Mais dans cette étude, nous ne nous intéresserons pas à la structure mathématique. Nous allons nous intéresser surtout aux différentes formules auxquelles nous sommes conduits dès que nous utilisons la méthode des exponentielles.

Nous ferons dans une étude ultérieure la comparaison des deux méthodes dans le cas du calcul de la partie du vertex («vertex - part») de l'électrodynamique quantique. Les différents types d'intégrales que l'on obtient sont pris sur l'espace à quatre dimensions (intégration sur l'espace des quadri-impulsions).

Aussi, suivons-nous le plan suivant :

– intégrale sur un espace à une dimension,
– intégrale sur une seule variable d'un espace à quatre dimensions (sur l'espace de Minkowski),
– intégrale sur deux variables, toutes les deux étant prises sur l'espace de Minkowski,
– intégrale sur n variables de l'espace de Minkowski.

Les résultats que nous allons donner sont très utiles, surtout dans le calcul de la renormalisation en utilisant la méthode des exponentielles ou des paramètres de Schwinger.

A – INTEGRALE A UNE DIMENSION

C'est la généralisation de l'intégrale de Gauss.

$$(A.1) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i\,(at^2 + bt)\right] dt = \begin{cases} \dfrac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\dfrac{\pi}{a}} \exp\left(-i\dfrac{b^2}{4a}\right) & \text{pour a réel} > 0 \\[2ex] \dfrac{1-i}{\sqrt{2}} \sqrt{\dfrac{\pi}{|a|}} \exp\left(-i\dfrac{b^2}{4a}\right) & \text{pour a réel} < 0 \end{cases}$$

Plaçons-nous d'abord dans le cas où $a > 0$ ($a = |a|$) et effectuons le changement de variable :

$$t = x \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right) - \frac{b}{2a} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\, x - \frac{b}{2a}$$

qui consiste en une rotation d'un angle $\frac{\pi}{4}$ suivie d'une translation.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i\,(at^2 + bt)\, dt\right] = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \exp.\left(-i\frac{b^2}{4a}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-a\, x^2\right) dx$$

L'intégrale du second membre est l'intégrale de Gauss qui est égale à $\sqrt{\frac{\pi}{a}}$, et nous obtenons la formule (A.1).

La démonstration pour a réel négatif peut se faire en posant $a = - a'$ avec $a' > 0$. Nous remarquons que ce dernier se ramène au premier cas moyennant le changement $b \to - b$, et en prenant le conjugué complexe. D'autres formules peuvent être obtenues à partir de (A.1) en dérivant successivement partiellement par rapport à a ou b, et en utilisant la formule de la dérivation sous le signe $\int$.

B — INTEGRALE SUR UNE SEULE VARIABLE DE L'ESPACE DE MINKOWSKI M.

Dans toute la suite,nous considérerons sauf indication contraire la métrique +++− c'est-à-dire la matrice de Gram est :

$$G_4 \equiv [\, g_{\mu\nu} \,] = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}$$

Le carré scalaire du quadri-vecteur $\bar{k}$ de composantes k_μ $\quad \mu = (0,1,2,3)$ est :

$$\bar{k}^2 = k^\mu \quad k_\mu = \vec{k}^2 - k_0^2$$

Le produit scalaire $\bar{p}\,.\,\bar{k}$ de deux quadri-vecteurs $\bar{p}$ et $\bar{k}$ est $(\bar{p}.\bar{k}) = p^\mu\, k_\mu = \vec{p}.\vec{k} - p_0 k_0$.

$$d^4\,\bar{k} = d\vec{k} \quad dk_0$$

$\bar{k} = (\vec{k}\,, k_0)$ $\qquad$ $\vec{k}$: composantes spatiales
$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad$ k_0 : composante temporelle.

Nous avons alors les formules suivantes :

$$\text{(B.1)} \quad \int_M \exp\left[\, i\,(a\bar{k}^2 + \bar{b}.\bar{k})\right] d^4\bar{k} = i\,\frac{\pi^2}{a^2}\,\exp\left(-i\,\frac{\bar{b}^2}{4a}\right) \qquad \text{pour } a > 0$$

$$\text{(B.2)} \quad \int_M \exp\left[-i\,(a\,\bar{k}^2 + \bar{b}.\bar{k})\right] d^4\bar{k} = -\,i\,\frac{\pi^2}{a^2}\,\exp\left(i\,\frac{\bar{b}^2}{4a}\right) \qquad \text{pour } a > 0$$

$$\text{(B.3)} \quad \int_M \exp\left[\, i\,(a\,\bar{k}^2 + \bar{b}.\bar{k})\right] d^4\bar{k} = -\,i\,\frac{\pi^2}{a^2}\,\exp\left(-i\,\frac{\bar{b}^2}{4a}\right) \qquad \text{pour } a < 0$$

$$\text{(B.4)} \quad \int_M \exp\left(-i\,(a\,\bar{k}^2 + \bar{b}.\bar{k})\right) d^4\bar{k} = i\,\frac{\pi^2}{a^2}\exp\left(i\,\frac{\bar{b}^2}{4a}\right) \qquad \text{pour } a < 0$$

(B.2) s'obtient à partir de (B.1) par conjugaison complexe.

(B.3) s'obtient à partir de (B.2) en appliquant celle-ci dans le cas où $a' = -a > 0$.

(B.4) s'obtient à partir de (B.3) par conjugaison complexe.

Il reste donc à démontrer la relation (B.1). Pour ce faire, nous développons le produit dans l'exponentielle :

$$(a\bar{k}^2 + \bar{b}.\bar{k}) = \sum_{i=1}^{3} (ak_i^2 + b_i\,k_i) - (a\,k_0^2 + b_o\,k_o)$$

$$\int_M \exp\left(i\,(a\bar{k}^2 + \bar{b}\,.\,\bar{k}\right) d^4\,\bar{k} = \prod_{i=1}^{3} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \quad i\,(ak_i^2 + b_i\,k_i)\,dk_i$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-i\,(ak_0^2 + b_o\,k_o)\right) dk_o$$

Nous utilisons la relation (A.1) et le second membre devient :

$$\left[\exp\left(i\,\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\frac{\pi}{a}}\right]^3 \exp\left(-i\,\sum_{i=1}^{3}\frac{b_i^2}{4a}\right)\exp\left(-i\,\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,\exp\left(i\,\frac{b_0^2}{4a}\right)$$

$$= \exp\left(i\,\frac{\pi}{2}\right)\left[\sqrt{\frac{\pi}{a}}\right]^4 \exp \quad -i\,\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{b_i^2}{4a} - \frac{b_0^2}{4a}\right)$$

Cette relation après une transformation immédiate donne (B.1)

En dérivant successivement partiellement par rapport aux composantes du quadri-vecteur $\bar{b}$, nous obtenons :

(B.5) $$\int_M \exp\left(-i\left(a\bar{k}^2 + \bar{b}.\bar{k}\right)\right) k^\mu d^4\bar{k} = i\frac{\pi^2}{2a^3}\, b^\mu \exp\left(i\frac{\bar{b}^2}{4a}\right) \qquad \text{pour } a > 0$$

(B.6) $$\int_M \exp\left[i\left(a\bar{k}^2 + \bar{b}.\bar{k}\right)\right] k^\mu\, d^4\bar{k} = -i\frac{\pi^2}{2a^3}\, b^\mu \exp\left(-i\frac{\bar{b}^2}{4a}\right) \qquad \text{pour } a > 0$$

(B.7) $$\int_M \exp\left[i\left(a\bar{k}^2 + \bar{b}.\bar{k}\right)\right] k^\mu\, d^4\bar{k} = i\frac{\pi^2}{2a^3}\, b^\mu \exp\left(-i\frac{\bar{b}^2}{4a}\right) \qquad \text{pour } a < 0$$

(B.8) $$\int_M \exp\left[-i\left(a\bar{k}^2 + \bar{b}.\bar{k}\right)\right] k^\mu\, d^4\bar{k} = -i\frac{\pi^2}{2a^3}\, b^\mu \exp\left(i\frac{\bar{b}^2}{4a}\right) \qquad \text{pour } a < 0$$

(B.9) $$\int_M \exp\left[-i\left(a\bar{k}^2 + \bar{b}.\bar{k}\right)\right] k^\mu k^\nu\, d^4\bar{k} = \frac{\pi^2}{a^2}\left[-\frac{g^{\mu\nu}}{2a} - i\frac{b^\mu b^\nu}{4a^2}\right] \exp\left(i\frac{\bar{b}^2}{4a}\right)$$

pour $a > 0$

(B.10) $$\int_M \exp\left[i\left(a\bar{k}^2 + \bar{b}.\bar{k}\right)\right] k^\mu k^\nu\, d^4\bar{k} = -\frac{\pi^2}{a^2}\left[\frac{g^{\mu\nu}}{2a} - i\frac{b^\mu b^\nu}{4a^2}\right] \exp\left(-i\frac{\bar{b}^2}{4a}\right)$$

pour $a > 0$

(B.11) $$\int_M \exp\left[i\left(a\bar{k}^2 + \bar{b}.\bar{k}\right)\right] k^\mu k^\nu\, d^4\bar{k} = \frac{\pi^2}{a^2}\left(\frac{g^{\mu\nu}}{2a} - i\frac{b^\mu b^\nu}{4a^2}\right) \exp\left(-i\frac{\bar{b}^2}{4a}\right)$$

pour $a < 0$

(B.12) $$\int_M \exp\left[-i\left(a\bar{k}^2 + \bar{b}.\bar{k}\right)\right] k^\mu k^\nu\, d^4\bar{k} = \frac{\pi^2}{a^2}\left(\frac{g^{\mu\nu}}{2a} + i\frac{b^\mu b^\nu}{4a^2}\right) \exp\left(i\frac{\bar{b}^2}{4a}\right)$$

pour $a < 0$

En sommant sur $\mu = \nu = (0, 1, 2, 3)$ après multiplication par $g\mu\nu$ des deux membres dans les formules (B.9), (B.10), (B.11) et (B.12), nous obtenons :

(B.13) $$\int_M \exp\left[-i\left(a\bar{k}^2 + \bar{b}.\bar{k}\right)\right] \bar{k}^2\, d^4\bar{k} = -\frac{\pi^2}{a^2}\,\frac{(8a + i\bar{b}^2)}{4a^2}\, \exp\left(i\frac{\bar{b}^2}{4a}\right)$$

pour $a > 0$

(B.14) $$\int_M \exp\left[i\left(a\bar{k}^2 + \bar{b}.\bar{k}\right)\right] \bar{k}^2\, d^4\bar{k} = -\frac{\pi^2}{a^2}\,\frac{(8a - i\bar{b}^2)}{4a^2}\, \exp\left(-i\frac{\bar{b}^2}{4a}\right)$$

pour $a > 0$

(B.15) $$\int_M \exp\left[i\left(a\bar{k}^2 + \bar{b}.\bar{k}\right)\right] \bar{k}^2\, d^4\bar{k} = \frac{\pi^2}{a^2}\,\frac{(8a - i\bar{b}^2)}{4a^2}\, \exp\left(-i\frac{\bar{b}^2}{4a}\right)$$

pour $a < 0$

$$(B.16)\quad \int_M \exp\left[-i\,(a\bar{k}^2+\bar{b}.\bar{k})\right]\bar{k}^2\,d^4\bar{k} = \frac{\pi^2}{a^2}\,\frac{(8a+i\bar{b}^2)}{4a^2}\,\exp\,i\left(\frac{\bar{b}^2}{4a}\right)$$

pour $a < 0$

Remarque :

Si nous avons considéré la métrique $(- - - +)$ au lieu de $(+ + + -)$ $[\,\bar{k}^2 = k_\rho^2 - \vec{k}^2\,]$ nous avons des changements de signe ; et dans ce cas, nous aurions par exemple :

$$\int_M \exp\left[\,i\,(a\bar{k}^2+\bar{b}.\bar{k})\,\right] d^4\bar{k} = -i\,\frac{\pi^2}{a^2}\,\exp\left(-i\,\frac{\bar{b}^2}{4a}\right) \qquad \text{pour } a > 0$$

$$\int_M \exp\left[\,i\,(a\bar{k}^2+\bar{b}.\bar{k})\,\right] k^\mu d^4\bar{k} = i\,\frac{b^\mu}{2a}\left[\frac{\pi}{a}\right]^2 \exp\left(-i\,\frac{\bar{b}^2}{4a}\right) \qquad \text{pour } a > 0$$

$$\int_M \exp\left[\,i\,(a\bar{k}^2+\bar{b}.\bar{k})\,\right] k^\mu k^\nu d^4\bar{k} = \frac{2ag^{\mu\nu} - ib^\mu b^\nu}{4a^2}\left[\frac{\pi}{a}\right]^2 \exp\left(-i\,\frac{\bar{b}^2}{4a}\right)$$

pour $a > 0$

En multipliant les deux membres de (B.5), (B.6), (B.7) et (B.8) par les quatre composantes p_μ du quadri-vecteur $\bar{p}$, nous avons :

$$(B.17)\quad \int_M \exp\left[-i\,(a\bar{k}^2+\bar{b}.\bar{k})\right](\bar{p}.\bar{k})\,d^4\bar{k} = i\,\frac{\pi^2}{2a^3}\,(\bar{p}.\bar{b})\,\exp\left(i\,\frac{\bar{b}^2}{4a}\right) \quad \text{pour } a > 0$$

$$(B.18)\quad \int_M \exp\left[\,i\,(a\bar{k}^2+\bar{b}.\bar{k})\right](\bar{p}.\bar{k})\,d^4\bar{k} = -i\,\frac{\pi^2}{2a^3}\,(\bar{p}.\bar{b})\,\exp\left(-i\,\frac{\bar{b}^2}{4a}\right)$$

pour $a > 0$

$$(B.19)\quad \int_M \exp\left[\,i\,(a\bar{k}^2+\bar{b}.\bar{k})\,\right](\bar{p}.\bar{k})\,d^4\bar{k} = i\,\frac{\pi^2}{2a^3}\,(\bar{p}.\bar{b})\,\exp\left(-i\,\frac{\bar{b}^2}{4a}\right)$$

pour $a < 0$

$$(B.20)\quad \int_M \exp\left[-i\,(a\bar{k}^2+\bar{b}.\bar{k})\,\right](\bar{p}.\bar{k})\,d^4\bar{k} = -i\,\frac{\pi^2}{2a^3}\,(\bar{p}.\,\bar{b})\,\exp\left(i\,\frac{\bar{b}^2}{4a}\right)$$

pour $a < 0$

Les dérivés partielles troisièmes de (B.1), (B.2), (B.3) et (B.4) par rapport à $b^\mu\, b^\nu\, b^\rho$ donnent :

$$(B.21)\quad \int_M \exp\left[-i\,(a\bar{k}^2+\bar{b}.\bar{k})\right] k_\mu k_\nu k_\rho\,d^4\bar{k} = \frac{\pi^2}{a^2}\left[\sum_{\mu,\nu,\rho}\frac{g_{\mu\nu}b_\rho}{4a^2} + i\,\frac{b_\mu b_\nu b_\rho}{8a^3}\right]$$

$$\times \exp\left(i\,\frac{\bar{b}^2}{4a}\right)$$

pour $a > 0$

$$(B.22)\quad \int_M \exp\left[\,i\,(a\bar{k}^2+\bar{b}.\bar{k})\right] k_\mu k_\nu k_\rho \, d^4\bar{k} = \frac{\pi^2}{a^2}\left[\sum_{\mu,\nu,\rho} \frac{g_{\mu\nu} b_\rho}{4a^2} - i\,\frac{b_\mu b_\nu b_\rho}{8a^3}\right] \times \exp\left(-i\,\frac{\bar{b}^2}{4a}\right) \qquad \text{pour } a > 0$$

$$(B.23)\quad \int_M \exp\left[\,i\,(a\bar{k}^2+\bar{b}.\bar{k})\right] k_\mu k_\nu k_\rho \, d^4\bar{k} = \frac{\pi^2}{a^2}\left[-\sum_{\mu,\nu,\rho} \frac{g_{\mu\nu} b_\rho}{4a^2} - i\,\frac{b_\mu b_\nu b_\rho}{8a^3}\right] \times \exp\left(-i\,\frac{\bar{b}^2}{4a}\right) \qquad \text{pour } a < 0$$

$$(B.24)\quad \int_M \exp\left[-i\,(a\bar{k}^2+\bar{b}.\bar{k})\right] k_\mu k_\nu k_\rho \, d^4\bar{k} = \frac{\pi^2}{a^2}\left[-\sum_{\mu,\nu,\rho} \frac{g_{\mu\nu} b_\rho}{4a^2} + i\,\frac{b_\mu b_\nu b_\rho}{8a^3}\right] \times \exp\left(i\,\frac{\bar{b}^2}{4a}\right) \qquad \text{pour } a < 0$$

$\sum_{\mu,\nu,\rho}$ signifie qu'il faut ajouter les termes obtenus en faisant une permutation circulaire des indices μ, ν, ρ :

$$\sum_{\mu,\nu,\rho} g_{\mu\nu} b_\rho = g_{\mu\nu}\, b_\rho + g_{\nu\rho} b_\mu + g_{\rho\mu} b_\nu$$

A partir de ces quatre formules, nous obtenons :

$$(B.25)\quad \int_M \exp\left[-i\,(a\bar{k}^2+\bar{b}.\bar{k})\right] k_\mu \bar{k}^2 d^4\bar{k} = \frac{\pi^2}{a^2}\left[\frac{3}{2a^2} + i\,\frac{\bar{b}^2}{8a^3}\right] b_\mu \exp\left(i\,\frac{\bar{b}^2}{4a}\right) \qquad \text{pour } a > 0$$

$$(B.26)\quad \int_M \exp\left[\,i\,(a\bar{k}^2+\bar{b}.\bar{k})\right] k_\mu \bar{k}^2 d^4\bar{k} = \frac{\pi^2}{a^2}\left[\frac{3}{2a^2} - i\,\frac{\bar{b}^2}{8a^3}\right] b_\mu \exp\left(-i\,\frac{\bar{b}^2}{4a}\right) \qquad \text{pour } a > 0$$

$$(B.27)\quad \int_M \exp\left[\,i\,(a\bar{k}^2+\bar{b}.\bar{k})\right] k_\mu \bar{k}^2 d^4\bar{k} = \frac{\pi^2}{a^2}\left[-\frac{3}{2a^2} - i\,\frac{\bar{b}^2}{8a^3}\right] b_\mu \exp\left(-i\,\frac{\bar{b}^2}{4a}\right) \qquad \text{pour } a < 0$$

$$(B.28)\quad \int_M \exp\left[-i\,(a\bar{k}^2+\bar{b}.\bar{k})\right] k_\mu \bar{k}^2 d^4\bar{k} = \frac{\pi^2}{a^2}\left[-\frac{3}{2a^2} + i\,\frac{\bar{b}^2}{8a^3}\right] b_\mu \exp\left(i\,\frac{\bar{b}^2}{4a}\right) \qquad \text{pour } a < 0$$

$$\text{(B.29)} \quad \int_M \exp\left[-i\,(a\bar{k}^2 + \bar{b}.\bar{k})\right] k_\mu\, (\bar{p}_1.\bar{k})\, (\bar{p}_2.\bar{k})\, d^4\bar{k} =$$

$$\frac{\pi^2}{a^2}\left[\frac{p_{1,\mu}(\bar{p}_2.\bar{b}) + p_{2,\mu}(\bar{p}_1.\bar{b}) + (\bar{p}_1.\bar{p}_2) b_\mu}{4a^2} + \frac{i\, b_\mu(\bar{p}_1.\bar{b})\, (\bar{p}_2.\bar{b})}{8a^3}\right] \times \exp\left(i\,\frac{\bar{b}^2}{4a}\right) \qquad \text{pour } a > 0$$

$$\text{(B.30)} \quad \int_M \exp\left[i\,(a\bar{k}^2 + \bar{b}.\bar{k})\right] k_\mu (\bar{p}_1.\bar{k})\, (\bar{p}_2.\bar{k})\, d^4\bar{k} =$$

$$\frac{\pi^2}{a^2}\left[\frac{p_{1,\mu}(\bar{p}_2.\bar{b}) + p_{2,\mu}(\bar{p}_1.\bar{b}) + (\bar{p}_1.\bar{p}_2) b_\mu}{4a^2} - \frac{i\, b_\mu(\bar{p}_1.\bar{b})\, (\bar{p}_2.\bar{b})}{8a^3}\right] \times \exp\left(-i\,\frac{\bar{b}^2}{4a}\right) \qquad \text{pour } a > 0$$

$$\text{(B.31)} \quad \int_M \exp\left[i\,(a\bar{k}^2 + \bar{b}.\bar{k})\right] k_\mu (\bar{p}_1.\bar{k})\, (\bar{p}_2.\bar{k})\, d^4\bar{k} =$$

$$\frac{\pi^2}{a^2}\left[-\frac{p_{1,\mu}(\bar{p}_2.\bar{b}) + p_{2,\mu}(\bar{p}_1.\bar{b}) + (\bar{p}_1.\bar{p}_2) b_\mu}{4a^2} - \frac{i\, b_\mu(\bar{p}_1.\bar{b})\, (\bar{p}_2.\bar{b})}{8a^3}\right] \times \exp\left(-i\,\frac{\bar{b}^2}{4a}\right) \qquad \text{pour } a < 0$$

$$\text{(B.32)} \quad \int_M \exp\left[-i\,(a\bar{k}^2 + \bar{b}.\bar{k})\right] k_\mu (\bar{p}_1.\bar{k})\, (\bar{p}_2.\bar{k})\, d^4\bar{k} =$$

$$\frac{\pi^2}{a^2}\left[-\frac{p_{1,\mu}(\bar{p}_2.\bar{b}) + p_{2,\mu}(\bar{p}_1.\bar{b}) + (\bar{p}_1.\bar{p}_2)\, b_\mu}{4a^2} - \frac{i\, b_\mu\, (\bar{p}_1.\bar{b})\, (\bar{p}_2.\bar{b})}{8a^3}\right] \times \exp\left(i\,\frac{\bar{b}^2}{4a}\right) \qquad \text{pour } a < 0$$

$$\text{(B.33)} \quad \int_M \exp\left[-i\,(a\bar{k}^2 + \bar{b}.\bar{k})\right] (\bar{p}_1.\bar{k})\, (\bar{p}_2.\bar{k})\, (\bar{p}_3.\bar{k})\, d^4\bar{k} =$$

$$\frac{\pi^2}{a^2}\left[\sum_{1,2,3} \frac{(\bar{p}_1.\bar{p}_2)\,(\bar{p}_3.\bar{b})}{4a^2} + i\,\frac{(\bar{p}_1.\bar{b})\,(\bar{p}_2.\bar{b})\,(\bar{p}_3.\bar{b})}{8a^3}\right] \exp\left(i\,\frac{\bar{b}^2}{4a}\right) \qquad \text{pour } a > 0$$

$$(B.34)\quad \int_M \exp\left[i\,(a\bar{k}^2+\bar{b}.\bar{k})\right](\bar{p}_1.\bar{k})(\bar{p}_2.\bar{k})(\bar{p}_3.\bar{k})\,d^4\bar{k} = \frac{\pi^2}{a^2}\left[\sum_{\overset{\frown}{1,2,3}}\frac{(\bar{p}_1.\bar{p}_2)(\bar{p}_3.\bar{b})}{4a^2} - i\,\frac{(\bar{p}_1.\bar{b})(\bar{p}_2.\bar{b})(\bar{p}_3.\bar{b})}{8a^3}\right]\exp\left(-i\,\frac{\bar{b}^2}{4a}\right)$$

pour $a > 0$

$$(B.35)\quad \int_M \exp\left[i\,(a\bar{k}^2+\bar{b}.\bar{k})\right](\bar{p}_1\bar{k})(\bar{p}_2.\bar{k})(\bar{p}_3.\bar{k})\,d^4\bar{k} = \frac{\pi^2}{a^2}\left[-\sum_{\overset{\frown}{1,2,3}}\frac{(\bar{p}_1.\bar{p}_2)(\bar{p}_3.\bar{b})}{4a^2} - i\,\frac{(\bar{p}_1.\bar{b})(\bar{p}_2.\bar{b})(\bar{p}_3.\bar{b})}{8a^3}\right]\exp\left(-i\,\frac{\bar{b}^2}{4a}\right)$$

pour $a < 0$

$$(B.36)\quad \int_M \exp\left[-i\,(a\bar{k}^2+\bar{b}.\bar{k})\right](\bar{p}_1.\bar{k})(\bar{p}_2.\bar{k})(\bar{p}_3.\bar{k})\,d^4\bar{k} = \frac{\pi^2}{a^2}\left[-\sum_{\overset{\frown}{1,2,3}}\frac{(\bar{p}_1.\bar{p}_2)(\bar{p}_3.\bar{b})}{4a^2} + i\,\frac{(\bar{p}_1.\bar{b})(\bar{p}_2.\bar{b})(\bar{p}_3.\bar{b})}{8a^3}\right]\exp\left(i\,\frac{\bar{b}^2}{4a}\right)$$

pour $a < 0$

$$\sum_{\overset{\frown}{1,2,3}}(\bar{p}_1.\bar{p}_2)(\bar{p}_3.\bar{b}) = (\bar{p}_1.\bar{p}_2)(\bar{p}_3.\bar{b}) + (\bar{p}_2.\bar{p}_3)(\bar{p}_1.\bar{b}) + (\bar{p}_3.\bar{p}_1)(\bar{p}_2.\bar{b})$$

Cette sommation a été déjà définie dans les formules (B.21) à (B.24)

C — INTEGRALE SUR DEUX VARIABLES QUADRIDIMENSIONNELLES

Définissons les trois expressions :

(C.1) $S \equiv i\,[\,a\bar{k}^2 + b\bar{k}'^2 + c\,\bar{k}.\bar{k}' + \bar{v}.\bar{k} + \bar{w}.\bar{k}'\,]$

(C.2) $R \equiv i\,(a\,\bar{w}^2 - c\,\bar{v}.\bar{w} + b\,\bar{v}^2)\,/\,4ab - c^2$

(C.3) $\text{dét } A = ab - c^2/4$

$\bar{k}$, $\bar{k}'$ $\bar{v}$ et $\bar{w}$ sont des quadrivecteurs. $\bar{v}.\bar{k}$ désigne le produit scalaire sur l'espace de Minkowski : $\bar{v}\,.\,\bar{k} = g^{\mu\nu}\,v_\mu k_\nu$ a, b et c sont des nombres — c.

Nous avons les formules suivantes :

$$(C.4) \qquad \int_M \exp\,(-S)\ d^4\bar{k}\, d^4\bar{k}' = \frac{-(2\pi)^4 \left\{\text{signe}\right\}}{[\,4\,ab-c^2\,]^2} \exp(R) \quad \text{pour } a > O$$

ou S et R sont définis par les expressions (C.1) et (C.2)

$\left\{ \text{Signe} \right\}$ représente le signe de l'expression $4\,ab-c^2$.

Démonstration de la formule (C.4). L'intégration sur $\bar{k}$ donne :

$$\int_M \exp\,(-S)\quad d^4\bar{k}\ d^4\bar{k}' =$$

$$-i\,\frac{\pi^2}{a^2}\int d^4\bar{k}'\ \exp\left[-\,i\ \bar{k}'^{\,2}\ \frac{(4\,ab-c^2)}{4a} + \bar{k}'.(\bar{w} - c\frac{\bar{v}}{2a}) - \frac{\bar{v}^2}{4a}\right]$$

Puis l'intégration sur $\bar{k}'$ conduit à la formule (C.4) après quelques simplifications. La formule (C.4) peut se mettre sous forme matricielle. Pour cela, nous définissons les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} a & \frac{c}{2} \\ \frac{c}{2} & b \end{bmatrix} \qquad A' = \begin{bmatrix} b & -\frac{c}{2} \\ -\frac{c}{2} & a \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} \bar{k}_1 \\ \bar{k}_2 \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} \bar{v} \\ \bar{w} \end{bmatrix} \quad \alpha = A \otimes G_4 = \begin{bmatrix} a\ G_4 & \frac{c}{2}\,G_4 \\ \frac{c}{2}\,G_4 & b\ G_4 \end{bmatrix}$$

$A' = \mathrm{Adj}A$. Adj A est définie par :

$A' = I\mathrm{Tr}\,A - A$ avec les propriétés suivantes :

$\mathrm{Adj}A.A = A.\mathrm{Adj}A = \text{dét}A\ I$. Et si A^{-1} existe

$$\mathrm{Adj}\,A = \frac{1}{\text{dét}\,A}\ A^{-1}$$

K et V sont des matrices colonnes à 8 composantes.

α est la matrice 8×8 produit tensoriel de la matrice A par la matrice 4×4 de Gram G_4.

Alors la formule (C.4) peut s'écrire sous la forme :

$$\text{(C.5)} \quad \int \exp \left[-i \left(K^T \alpha K + V^T K \right) \right] d\bar{k}_1 \, d\bar{k}_2 = - \frac{\pi^4}{[\text{dét}A]^2} \, [\text{ Signe a }] \, [\text{ Signe dét}A \,] \, \exp \, i \, \frac{[V^T \alpha' V]}{4 \, \text{dét}A}$$

où V^T signifie le transposé de la matrice colonne V et

$$\alpha' = \text{Adj } A \otimes G_4 = \begin{bmatrix} b\, G_4 & -\frac{c}{2} \, G_4 \\ -\frac{c}{2} \, G_4 & a \, G_4 \end{bmatrix}$$

En prenant successivement $\frac{\partial}{\partial v\mu}$, $\frac{\partial}{\partial w\mu}$, $\frac{\partial}{\partial a}$, $\frac{\partial}{\partial b}$, $\frac{\partial}{\partial c}$ . . . . , nous obtenons :

$$\text{(C.6)} \quad \int \exp(-S) \, k_\mu d^4\bar{k} \, d^4\bar{k}' = (2\pi)^4 \frac{[\text{Signe a}] \, [\text{ Signe dét A}]}{[\, 4ab - c^2 \,]^3} [2bv_\mu - cw_\mu] \times \exp \quad (R)$$

$$\text{(C.7)} \quad \int \exp(-S) \, k'_\mu d^4\bar{k} \, d^4\bar{k}' = (2\pi)^4 \frac{[\text{ Signe a}] \, [\text{ Signe dét A}]}{[\, 4ab - c^2 \,]^3} [\, 2aw_\mu - cv_\mu] \times \exp \quad (R)$$

$$\text{(C.8)} \quad \int \exp(-S) \, \bar{k}^2 \, d^4\bar{k} \, d^4\bar{k}' = (2\pi)^4 \frac{[\text{ Signe a}] \, [\text{Signe dét A}]}{[4ab - c^2\,]^3} \times \left[- \frac{c^2 \bar{w}^2 + 4bc \, \bar{v}.\bar{w} - 4b^2 \bar{v}^2}{4ab - c^2} + 8 \, ib \right] \exp \quad (R)$$

$$\text{(C.9)} \quad \int \exp(-S) \, \bar{k}'^2 \, d^4\bar{k} \, d^4\bar{k}' \doteq (2\pi)^4 \frac{[\text{Signe a}] \, [\text{Signe dét A}]}{[4ab - c^2\,]^3} \times \left[- \frac{c^2 \bar{v}^2 + 4ac\bar{v}.\bar{w} - 4a^2 \bar{w}^2}{[4ab - c^2]} + 8 \, ia \right] \exp \quad (R)$$

$$\text{(C.10)} \quad \int \exp(-S) \, \bar{k}.\bar{k}' \, d^4\bar{k} \, d^4\bar{k}' = (2\pi)^4 \frac{[\text{Signe a}] \, [\text{Signe dét A}]}{[4ab - c^2\,]^3} \times \left[\frac{2ac \, \bar{w}^2 - (4ab + c^2) \, \bar{v}.\bar{w} + 2bc\bar{v}^2}{4ab - c^2} - 4ic \right] \exp \ (R)$$

$$\text{(C.11)} \quad \int \exp(-S)\, k_\mu k'_\nu \; d^4\bar{k}\; d^4\bar{k}' = (2\pi)^4 \frac{[\text{Signe a}]\,[\text{Signe dét A}]}{[4ab - c^2]^3}$$

$$\times \left[\frac{2ac \;\; w_\mu w_\nu - 4ab v_\mu w_\nu - c^2 w_\mu v_\nu + 2bc\; v_\mu v_\nu}{4ab - c^2} - ic\, g_{\mu\nu} \right] \exp\;(R)$$

La relation (C.10) peut être obtenue à partir de (C. 11) en faisant $\mu = \nu$ après multiplication par $g\mu\nu$ et en sommant sur μ.

D — GENERALISATION. INTEGRALES SUR n VARIABLES QUADRI-DIMENSIONNELLES.

Nous allons maintenant donner une formule générale.

$$\text{(D.1)} \qquad I[A, b] = \int \exp\left[-i\;(A_{ij}\,\bar{k}_i \cdot \bar{k}_j + \bar{b}_i \cdot \bar{k}_i) \right] \prod_{j=1}^{n} d^4\,\bar{k}_j$$

$$= \frac{(-i\pi^2)^n}{|\,\text{dét A}\,|^2} \quad \exp\left[\frac{i}{4}\; \bar{b}_k \cdot A^{-1}_{km} \;\; \bar{b}_m \right]$$

où la matrice $A = [A_{i\,j}]$ est une matrice n $\times$ n définie positive et non dégénérée. $\prod_{j=1}^{n} d^4\bar{k}_j$ est le produit $d^4\bar{k}_1 \ldots\ldots. d^4\bar{k}_n$ des différentielles des n quadrivecteurs $\bar{k}_1, \ldots \bar{k}_n$ $\;\bar{k}_i \cdot \bar{k}_j$ désigne le produit minkowskien des quadri-vecteurs $\bar{k}_i$ et $\bar{k}_j$.

Nous faisons la convention qu'il y a sommation sur les indices répétés sauf indication contraire. Remarquons que la condition a > O (avec a ≠ O) dans les paragraphes précédents est remplacée par la condition que la matrice A est définie positive et non dégénérée.

Démonstration

Au moyen d'une translation linéaire bien connue, nous pouvons toujours nous ramener au cas de la matrice A symétrique.

Comme A est symétrique, il existe la matrice S orthogonale ($S^T = S^{-1}$, T désigne le transposé) tel que la transmuée $C = S^{-1} A S$ de A par S soit diagonale :

$C_{\ell m} = C_\ell \, \partial_{\ell m}$ (sans sommation sur ℓ) avec $C_\ell > 0$, la matrice A étant définie positive et non dégénérée. Nous faisons le changement de variables :

$$\overline{X}_j = \overline{k}_i \quad S_{ij}$$

et nous obtenons :

$$A_{ij} \quad \overline{k}_i \cdot \overline{k}_j \quad = \quad C_\ell \quad \overline{X}_\ell \cdot \overline{X}_\ell$$

$$\overline{b}_i \cdot \overline{k}_i \quad = \quad \overline{\beta}_j \cdot \overline{X}_j \quad \text{avec} \quad \overline{\beta}_j = \overline{b}_i \; S_{ij}$$

Le jacobien de la transformation est $|\,\text{dét } S\,|$ qui est égal à 1 car la matrice S est orthogonale. A l'aide des nouvelles variables $\overline{X}_i$, nous avons :

$$\begin{aligned}
I[A, b] \quad &= \int \exp\left[-i\,(C_\ell \, \overline{X}_\ell \cdot \overline{X}_\ell + \overline{\beta}_\ell \cdot \overline{X}_\ell)\right] \prod_{i=1}^{n} d^4 X_i \\
&= \prod_{\ell=1}^{n} \int \exp \left[-i\,(C_\ell \, \overline{X}_\ell \cdot \overline{X}_\ell + \overline{\beta}_\ell \cdot \overline{X}_\ell)\right] d^4 \, \overline{X}_\ell \\
&= \prod_{\ell=1}^{n} \frac{-i\pi^2}{C_\ell^2} \exp\left[\frac{i}{4} \; \frac{\overline{\beta}_\ell \cdot \overline{\beta}_\ell}{C_\ell^2}\right] \qquad \text{(sans sommation sur } \ell) \\
&= \frac{(-i\pi^2)^n}{\prod_{\ell=1}^{n} C_\ell^2} \exp\left[\frac{i}{4} \sum_{j=1}^{n} \frac{\overline{\beta}_j \cdot \overline{\beta}_j}{C_j}\right]
\end{aligned}$$

Nous revenons enfin aux variables $\overline{b}_i$ et à la matrice A. Nous remarquons que :

$$\prod_{\ell=1}^{n} C_\ell^2 = (\text{dét } C)^2 = (\text{dét } A)^2$$

$$\frac{\overline{\beta}_j \cdot \overline{\beta}_j}{C_j} = \overline{b}_j \cdot A^{-1}_{jm} \quad \overline{b}_m$$

ce qui donne alors la formule (D.1)